Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat S Nouvelle-Calédonie novembre 2006 ∾

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Une maladie est apparue dans le cheptel bovin d'un pays. Elle touche 0,5 % de ce cheptel (ou 5 pour mille).

1. On choisit au hasard un animal dans le cheptel. Quelle est la probabilité qu'il soit malade ?
2. **a.** On choisit successivement et au hasard 10 animaux. On appelle X la variable aléatoire égale au nombre d'animaux malades parmi eux.
   Montrer que X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres. Calculer son espérance mathématique.
   b. On désigne par A l'évènement « aucun animal n'est malade parmi les 10 ».
   On désigne par B l'évènement « au moins un animal est malade parmi les 10 ».
   Calculer les probabilités de A et de B.
3. On sait que la probabilité qu'un animal ait un test positif à cette maladie sachant qu'il est malade est $0,8$. Lorsqu'un animal n'est pas malade, la probabilité d'avoir un test négatif est $0,9$.
   On note T l'évènement « avoir un test positif à cette maladie » et M l'évènement « être atteint de cette maladie ».
   a. Représenter par un arbre pondéré les données de l'énoncé.
   b. Calculer la probabilité de l'évènement T.
   c. Quelle est la probabilité qu'un animal soit malade sachant que le test est positif ?

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Les parties A et B sont indépendantes

On considère l'équation (E)

$$z^3-(4+\mathrm{i})z^2+(7+\mathrm{i})z-4=0$$

où z désigne un nombre complexe.

Partie A

1. **a.** Montrer que (E) admet une solution réelle, note z_1.
   b. Déterminer les deux nombres complexes a et b tels que, pour tout nombre complexe z on ait :

$$z^3-(4+\mathrm{i})z^2+(7+\mathrm{i})z-4=(z-z_1)(z-2-2\mathrm{i})(az+b)$$

2. Résoudre (E).

Partie B

Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$, on considère les trois points A, B et C d'affixes respectives $1,\ 2+2\mathrm{i}$ et $1-\mathrm{i}$.

1. Représenter A, B et C.

2. Déterminer le module et un argument de $\dfrac{2+2\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$. En déduire la nature du triangle OBC.
3. Que représente la droite (OA) pour le triangle OBC ? Justifier votre affirmation.
4. Soit D l'image de O par la rotation d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$ et de centre C. Déterminer l'affixe de D.
5. Quelle est la nature de OCDB ?

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$. (unité 1 cm).
On construira une figure que l'on complétera au fur et mesure.

1. Soit A le point d'affixe 3, et r la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$. On note B, C, D, E et F les images respectives des points A, B, C, D et E par la rotation r.
   Montrer que B a pour affixe $\dfrac{3}{2}+\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$.
2. Associer à chacun des points C, D, E et F l'une des affixes de l'ensemble suivant
$$\left\{-3\,;\ -\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\,;\ \frac{3}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\,;\ -\frac{3}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right\}$$
3. **a.** Déterminer $r(\mathrm{F})$.
   b. Quelle est la nature du polygone ABCDEF ?
4. Soit s la similitude directe de centre A, de rapport $\dfrac{1}{2}$ et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$. Soit s' la similitude directe de centre E transformant F en C.
   a. Déterminer l'angle et le rapport de s'. En déduire l'angle et le rapport de $s'\circ s$.
   b. Quelle est l'image du point D par $s'\circ s$?
   c. Déterminer l'écriture complexe de $s'\circ s$.
5. Soit A$'$ le symétrique de A par rapport à C.
   a. Sans utiliser les nombres complexes, déterminer $s(\mathrm{A}')$ puis l'image de A$'$ par $s'\circ s$.
   b. Calculer l'affixe du point A$'$. Retrouver alors le résultat du **a.** en utilisant l'écriture complexe de $s'\circ s$.

EXERCICE 3 **5 points**

Commun à tous les candidats

Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :
$$u_0=\frac{1}{2}\quad \text{et}\quad u_{n+1}=\frac{1}{2}\left(u_n+\frac{2}{u_n}\right)$$

1. **a.** Soit f la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par
$$f(x)=\frac{1}{2}\left(x+\frac{2}{x}\right)$$
   Étudier le sens de variation de f, et tracer sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$. (On prendra comme unité 2 cm).

b. Utiliser le graphique précédent pour construire les points A_0, A_1, A_2 et A_3 de l'axe $\left(O\,;\,\vec{\imath}\right)$ d'abscisses respectives u_0, u_1, u_2 et u_3.

2. **a.** Montrer que pour tout entier naturel n non nul $u_n \geqslant \sqrt{2}$.

b. Montrer que pour tout $x \geqslant \sqrt{2}$, $f(x) \leqslant x$.

c. En déduire que la suite (u_n) est décroissante à partir du rang 1.

d. Prouver qu'elle converge.

3. Soit ℓ la limite de la suite (u_n). Montrer que ℓ est solution de l'équation

$$x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$$

En déduire sa valeur.

EXERCICE 4 **6 points**

Commun tous les candidats

Première partie

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(O,\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$. On considère :

— les points $A(0\,;0\,;3)$, $B(2\,;0\,;4)$, $C(-1\,;\,1\,;\,2)$ et $D(1\,;\,-4\,;\,0)$

— les plans $(P_1)\ :\ 7x+4y-3z+9=0$ et $(P_2) : x-2y=0$.

— les droites (Δ_1) et (Δ_2) définies par leurs systèmes d'équations paramétriques respectifs

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& -1+\ \ t \\ y &=& -8+2t \\ z &=& -10+5t \end{array}\right.\quad t\in\mathbb{R} \qquad \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 7+2t' \\ y &=& 8+4t' \\ z &=& 8-\ \ t' \end{array}\right.\quad t'\in\mathbb{R}$$

Pour chaque question, une seule des quatre propositions est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Une réponse exacte rapporte 0,5 *point; une réponse inexacte enlève* 0,25 *point; l'absence de réponse est comptée* 0 *point. Si le total est négatif, la note est ramenée à* 0.

	a.	b.	e.	d.
1. Le plan (P_1) est	Le plan (ABC)	Le plan (BCD)	Le plan (ACD)	Le plan (ABD)
2. La droite (Δ_1) contient	Le point A	Le point B	Le point C	Le point D
3. Position relative de (P_1) et de (Δ_2)	(Δ_1) est strictement parallèle a (P_1)	(Δ_1) est incluse dans (P_1)	(Δ_1) coupe (P_1)	(Δ_1) est orthogonale à (P_1)
4. Position relative de (Δ_1) et de (Δ_2)	(Δ_1) est strictement parallèle à (Δ_2)	(Δ_1) et (Δ_2) sont confondues	(Δ_1) et (Δ_2)) sont sécantes	(Δ_1) et (Δ_2) sont non coplanaires.
5. L'intersection de (P_1) et de (P_2) est une droite dont une représentation paramétrique est	$\left\{\begin{array}{rcr} x &=& t \\ y &=& -2+\frac{1}{2}t \\ z &=& 3t \end{array}\right.$	$\left\{\begin{array}{rcr} x &=& 2t \\ y &=& t \\ z &=& 3+6t \end{array}\right.$	$\left\{\begin{array}{rcr} x &=& 5t \\ y &=& 1-2t \\ z &=& t \end{array}\right.$	$\left\{\begin{array}{rcr} x &=& -1+t \\ y &=& 2+t \\ z &=& -3t \end{array}\right.$

Deuxième partie

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(O,\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$. On considère la droite (D) passant par $A(0\,;0\,;3)$ et dont un vecteur directeur est $\vec{u}\,(1\,;\,0\,;\,-1)$ et la droite (D$'$) passant par $B(2\,;0\,;4)$ et dont un vecteur directeur est $\vec{v}\,(0\ :\ 1\,;\,1)$.

L'objectif est de démontrer qu'il existe une droite unique perpendiculaire à la fois à (D) et à (D$'$), de la déterminer et de dégager une propriété de cette droite.

1. On considère un point M appartenant à (D) et un point M' appartenant à (D$'$), définis par $\overrightarrow{\text{A}M} = a\,\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{\text{B}M'} = b\,\overrightarrow{v}$, où a et b sont de nombres réels.

   Exprimer les coordonnées de M, de M' puis du vecteur $\overrightarrow{MM'}$ en fonction de a et b.
2. Démontrer que la droite (MM') est perpendiculaire à (D) et à (D$'$) si et seulement si le couple $(a\,;\ b)$ est solution du système

$$\left\{\begin{array}{rcr} 2a+b & = & 1\\ a+2b & = & -1\end{array}\right.$$

3. Résoudre ce système. En déduire les coordonnées des deux uniques points M et M', que nous noterons ici H et H', tels que la droite (HH$'$) soit bien perpendiculaire commune à (D) et à (D$'$). Montrer que HH$' = \sqrt{3}$ unités de longueur.
4. On considère un point M quelconque de la droite (D) et un point M' quelconque de la droite (D$'$).
   a. En utilisant les coordonnées obtenues à la question 1, démontrer que

$$MM'^2 = (a+b)^2 + (a-1)^2 + (b+1)^2 + 3.$$

   b. En déduire que la distance MM' est minimale lorsque M est en H et M' est en H$'$.