Durée : 4 heures

Baccalauréat C Nouvelle-Calédonie décembre 1991

EXERCICE 1 **5 points**

ABC est un triangle équilatéral de côté a. On note A′ le milieu du segment BC et O le centre du triangle.

1. a. Déterminer l'ensemble $\mathscr{E}$ des réels m tels que les points A, B, C affectés des coefficients respectifs m, 1, 1 admettent un barycentre.
   b. Quel est l'ensemble des barycentres obtenus lorsque m parcourt $\mathscr{E}$?
2. Dans cette question on choisit $m = 2$.
   a. Déterminer le barycentre G des points A, B, C affectés des coefficients respectifs 2, 1, 1. Placer sur une figure les points A, B, C, O, A′, G.
   b. Déterminer et construire l'ensemble $\mathscr{F}$ des points M tels que :

$$2M\text{A}^2 + M\text{B}^2 + M\text{C}^2 = 2a^2$$

3. Dans cette question on choisit $m = -2$. Soit $\mathscr{D}$ l'ensemble des points M tels que :

$$-2M\text{A}^2 + M\text{B}^2 + M\text{C}^2 = 0.$$

   a. Préciser la nature de $\mathscr{D}$ et de son intersection avec la droite (AA′).
   b. Tracer $\mathscr{D}$ sur la figure précédente.

EXERCICE 2 **4 points**

On considère le mot SUITE, On forme des « mots » (ayant un sens ou non), de une à cinq lettres, à partir des lettres du mot SUITE, Chaque lettre intervient au plus une fois dans un même « mot ».

1. Combien de « mots » peut-on former ?
2. Combien de « mots » de cinq lettres peut-on former ?
3. Déterminer le nombre de « mots » de cinq lettres dans lesquels il n'y a pas deux voyelles consécutives.

PROBLÈME **11 points**

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \text{e}^{2x}\left(\text{e}^{x} - 2\right)^2.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal.

Partie A

L'objet de cette partie est d'étudier la fonction f.

1. a. Préciser $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x)$.
   b. Démontrer que la droite d'équation $y = 0$ est asymptote à $\mathscr{C}$.

2. On désigne par f' la fonction dérivée de f.
   a. Démontrer que, pour tout réel x, on a :

$$f'(x) = 4\mathrm{e}^{2x}\left(\mathrm{e}^{x}-1\right)\left(\mathrm{e}^{x}-2\right).$$

   b. Étudier les variations de f et dresser le tableau de variations de f.

3. En prenant comme unité graphique 4 cm et en plaçant l'origine O du repère au centre de la feuille, tracer la courbe $\mathscr{C}$ sur une feuille de papier millimétré.

Partie B

L'objet de cette partie est d'étudier la position relative de deux courbes.
Soit F la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \int_{\ln 2}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Étudier le sens de variation de F.
2. Calculer $F(x)$ et vérifier que $F(x)$ peut se mettre sous la forme suivante :

$$F(x) = \frac{1}{12}\left(\mathrm{e}^{x}-2\right)^{2}\left(3\mathrm{e}^{2x}-4\mathrm{e}^{x}-4\right).$$

3. Soit Γ la courbe représentative de la fonction F.
   Étudier la position de Γ par rapport à la courbe $\mathscr{C}$.
4. **a.** Démontrer que Γ admet une asymptote, parallèle à l'axe des abscisses, dont on donnera une équation.
   b. Tracer Γ sur la même figure que $\mathscr{C}$.