Baccalauréat ES Nouvelle-Calédonie décembre 1996

EXERCICE 1 **5 points**
Commun à tous les candidats

Tous les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.
Un mélange de graines de fleurs contient :
- 50 graines de type A ;
- 90 graines de type B ;
- 60 graines de type C.

Toutes les graines n'ont pas le même pouvoir de germination. On conviendra qu'une graine germe correctement si celle-ci donne naissance à une plante qui fleurit.
On considère que la probabilité pour qu'une graine germe correctement est de :
- $0,5$ pour une graine de type A ;
- $0,8$ pour une graine de type B ;
- $0,6$ pour une graine de type C.

On sème une graine prise au hasard dans le mélange.

1. Quelle est la probabilité que ce soit une graine de type A ?
2. Quelle est la probabilité que ce soit une graine de type A et que celle-ci germe correctement ?
3. Quelle est la probabilité que la graine semée soit une graine qui germe correctement ?
4. Quelle est la probabilité que la graine semée soit une graine de type C qui ne germe pas correctement ?

EXERCICE 2 **5 points**
Enseignement obligatoire

Dans cet exercice les résultats numériques pourront être obtenus à l'aide de la calculatrice, sans justification. Ils seront arrondis à 10^{-3} près, sauf indication contraire.
Le tableau suivant donne l'évolution de 1987 à 1994 de la dette extérieure des pays en développement, en milliards de dollars.

Année i	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994
Rang x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
Montant d_i de la dette	1369	1375	1427	1539	1627	1696	1812	1945

Source : Banque Mondiale.

1. **a.** On pose $y_i = \ln(d_i)$, où ln désigne la fonction logarithme népérien. Après l'avoir recopié, compléter le tableau suivant par les valeurs de y_i.

Rang x_i de l'année i	1	2	3	4	5	6	7	8
y_i								

   b. Représenter le nuage de points associé à la série statistique $(x_i ; y_i)$ dans le plan rapporté à un repère orthogonal (unités graphiques : 2 cm sur l'axe des abscisses et 20 cm sur l'axe des ordonnées).
2. **a.** Déterminer le coefficient de corrélation linéaire entre x et y.
   b. Déterminer, par la méthode des moindres carrés, une équation de la droite de régression de y en x.
   c. Déduire de la question précédente une relation entre d et x, de la forme : $d = \alpha\beta^x$.
3. En supposant que la relation précédente soit valable pour les années à venir, estimer, pour 1996, le montant de la dette extérieure des pays en développement (arrondir le résultat à un milliard près).

EXERCICE 2 **5 points**

Enseignement de spécialité

Soit la suite $(U_n)_{n\geqslant 0}$ définie par

$$U_n = \int_n^{n+1} 2\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x.$$

1. **a.** Calculer U_0.

   b. Montrer que, pour tout nombre entier naturel n, $U_n = \mathrm{e}^{-2n}\left(1-\mathrm{e}^{-2}\right)$.

2. Démontrer que la suite $(U_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite géométrique, dont on précisera la raison.

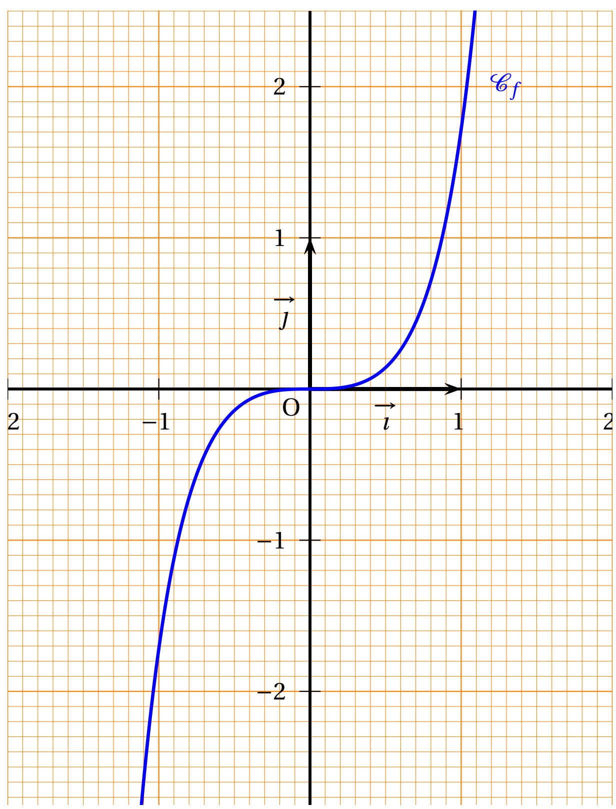
3. Pour tout entier naturel n, on pose $S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \ldots + U_n$.

   a. Exprimer S_n en fonction de n.

   b. Étudier la limite de la suite $(S_n)_{n\geqslant 0}$

PROBLÈME **5 points**

Utiliser le dessin ci-dessous pour tous les graphiques demandés dans ce problème.



Partie A

La fonction g est définie sur l'intervalle $]-1~;~+\infty[$ par :

$$g(x) = \ln(x+1) + 2x.$$

Sa courbe représentative dans le repère orthogonal $\left(\mathrm{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ est désignée par $\mathscr{C}_g$ (unités graphiques : 4 cm en abscisse et 2 cm en ordonnée).

1. **a.** Déterminer les limites de g en -1 et en $+\infty$; en déduire que la courbe $\mathscr{C}_g$ admet une asymptote D dont on donnera une équation.

   b. Déterminer le sens de variation de chacune des deux fonctions h et k définies sur l'intervalle $]-1~;~+\infty[$ par :

   $$h(x) = \ln(x+1) \quad \text{et} \quad k(x) = 2x.$$

   En déduire le sens de variation de g sur $]-1~;~+\infty[$.

   c. Dresser le tableau de variation de g sur $]-1~;~+\infty[$.

2. Calculer $g(0)$ et en déduire le signe de g sur $[0~;~+\infty[$. Tracer, sur le graphique joint la courbe $\mathscr{C}_g$ et l'asymptote D.

   a. Montrer que la fonction G, définie sur $]-1~;~+\infty[$ par

   $$G(x) = x\ln(x+1) + \ln(x+1) - x + x^2,$$

   est une primitive de g.

   b. Calculer l'intégrale $I_1 = \displaystyle\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x\left(\mathrm{e}^{x^2} - 1\right).$$

Cette fonction est représentée, sur l'intervalle $[-2~;~2]$, dans le repère $\left(\mathrm{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$, par la courbe $\mathscr{C}_f$ (voir le dessin joint).

1. **a.** On note f' la fonction dérivée de f. Vérifier l'égalité suivante, pour tout nombre réel x,

   $$f'(x) = \mathrm{e}^{\left(x^2\right)} - 1 + 2x^2\mathrm{e}^{\left(x^2\right)}.$$

   Quel est le signe de $\mathrm{e}^{\left(x^2\right)} - 1$?

   En déduire que, pour tout nombre réel x, $f'(x)$ est positif ou nul.

   b. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

   c. Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

2. Soit I_2, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

   Montrer que $I_2 = \dfrac{\mathrm{e}}{2} - 1$.

Partie C

On admettra que, sur $[0;~1]$, la fonction f est positive et que les fonctions f et g vérifient : $f \leqslant g$.

Soit $\mathscr{A}$ la surface délimitée, sur le graphique, par les deux courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

Colorier la surface $\mathscr{A}$, puis calculer à l'aide des intégrales I_1 et I_2 l'aire de $\mathscr{A}$, exprimée en cm^2.

Donner la valeur exacte de l'aire de $\mathscr{A}$, puis sa valeur décimale arrondie à 10^{-2} près.