Baccalauréat S Nouvelle–Calédonie décembre 1999

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère les points A(3 ; 0 ; 1), B(0 ; −1 ; 2) et C(1 ; −1 ; 0).

1. Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$. En déduire une équation cartésienne du plan ABC.
2. Soit D le point de coordonnées (1, 1, - 2). Calculer le produit scalaire du vecteur $\overrightarrow{DA}$ et du vecteur $\overrightarrow{DB} \wedge \overrightarrow{DC}$.
3. **a.** Déterminer une représentation paramétrique de la droite passant par D et dont un vecteur directeur est $\vec{n}$.

   b. Déterminer les coordonnées du point d'intersection H de cette droite avec le plan ABC.

   c. Calculer DH (distance du point D au plan ABC).
4. Calculer les coordonnées du point D′, symétrique du point D par rapport au plan ABC.

EXERCICE 2 **5 points**

Enseignement obligatoire

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$; unité graphique : 2 cm.

1. Tracer les cercles de centre O et de rayons 1 et 2. Placer les points A, B, et D d'affixes respectives $\sqrt{3} + \text{i}$, $\sqrt{3} - \text{i}$ et $-\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\text{i}$.
2. On considère la rotation R de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$ et la translation T de vecteur d'affixe 1.

   a. Déterminer les affixes $z_{A'}$ et $z_{B'}$ des points A′ et B′, images respectives des points A et B par la rotation R.

   b. Déterminer l'affixe $z_{D'}$, du point D′, image du point D par la translation T.

   c. Placer les points A′, B′ et D′.
3. Déterminer un argument du nombre complexe $\dfrac{z_{A'} - z_{B'}}{z_{D'}}$.

   Justifier que la droite (OD′) est une médiatrice du triangle OA′B′.

EXERCICE 2 **5 points**

Enseignement de spécialité

Soit n un entier naturel non nul, on considère les entiers suivants : $N = 9n + 1$ et $M = 9n - 1$.

1. On suppose que n est un entier pair. On pose $n = 2p$, avec p entier naturel non nul.

   a. Montrer que M et N sont des entiers impairs.

   b. En remarquant que $N = M + 2$, déterminer le PGCD de M et N.
2. On suppose que n est un entier impair. On pose $n = 2p + 1$, avec p entier naturel.

   a. Montrer que M et N sont des entiers pairs.

   b. En remarquant que $N = M + 2$, déterminer le PGCD de M et N.
3. Pour tout entier naturel non nul n, on considère l'entier $81n^2 - 1$.

   a. Exprimer l'entier $81n^2 - 1$ en fonction des entiers M et N.

   b. Démontrer que si n est pair alors $81n - 1$ est impair.

   c. Démontrer que $81n^2 - 1$ est divisible par 4 si et seulement si n est impair.

Problème **11 points**

Commun à tous les candidats

Partie A - Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle :

$$y' - 2y = e^{2x}, \quad (E).$$

1. Démontrer que la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = xe^{2x}$ est une solution de (E).
2. Résoudre l'équation différentielle : $y' - 2y = 0 \quad (E_0)$.
3. Démontrer qu'une fonction v définie sur $\mathbb{R}$ est solution de (E) si et seulement si $v - u$ est solution de (E_0).
4. En déduire toutes les solutions de l'équation (E).
5. Déterminer la fonction, solution de (E), qui prend la valeur 1 en 0.

Partie B - Étude d'une fonction

Le plan est rapporté au repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (x+1)e^{2x}.$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans le repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

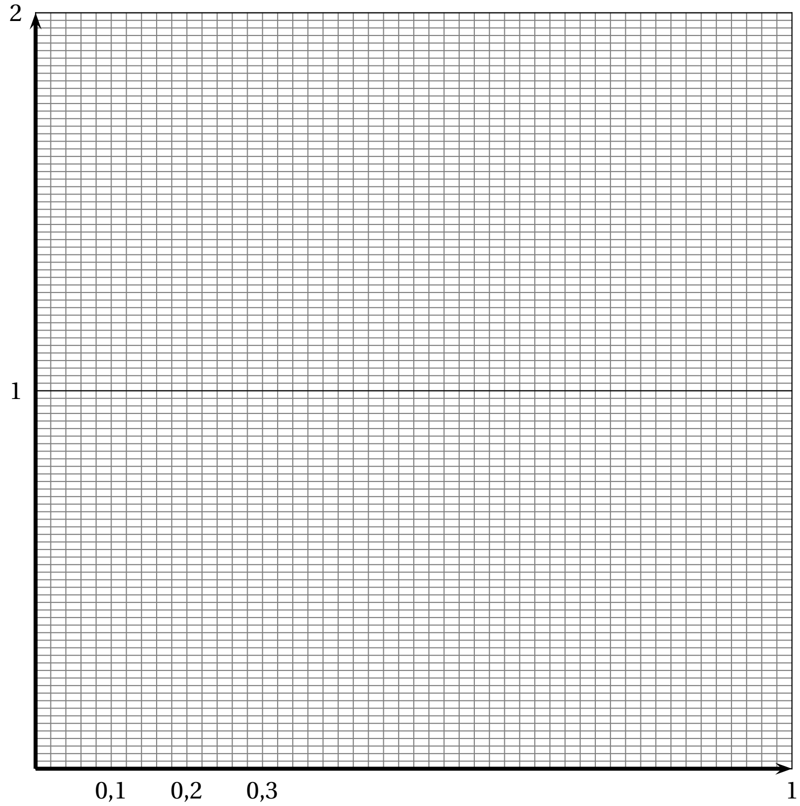
1. Étudier la limite de f en $+\infty$ puis la limite de f en $-\infty$.
2. Soit x un nombre réel. Calculer $f'(x)$.
   Étudier les variations de f puis dresser son tableau de variations.
   Préciser le signe de $f(x)$ pour tout réel x.
3. Soit un réel α strictement inférieur à -1. On considère le domaine plan $\mathcal{D}$ limité par $\mathcal{C}$, les droites d'équation $x = \alpha$, $x = -1$ et l'axe des abscisses.
   a. À l'aide d'une intégration par parties, calculer l'aire $\mathcal{D}(\alpha)$ du domaine $\mathcal{D}$.
   b. Déterminer la limite de $\mathcal{D}(\alpha)$ lorsque α tend vers $-\infty$.

Partie C - Résolution d'une équation

1. Montrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une solution unique x_0 dans l'intervalle $[0,2 ; 0,3]$.
2. Recopier, puis compléter le tableau suivant :

x	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3
$f(x)$						

   Les valeurs de $f(x)$ seront arrondies avec une précision de 10^{-2} près par défaut.
3. Sur le papier millimétré, ci-dessous, où les unités sont de 10 cm en abscisses et 5 cm en ordonnées, tracer l'arc de la courbe $\mathcal{C}$ pour x appartenant à $[0 ; 0,3]$.
   Faire apparaître x_0 sur le graphique.



Démontrer que x_0 satisfait à la relation : $x_0 = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{2}{x_0+1}\right)$.

Partie D - Approximation de x_0

1. Soit h la fonction définie sur I = [0,2 ; 0,3] par

$$h(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2}{x_0+1}\right).$$

a. Démontrer que pour tout x de I, $h(x)$ appartient à I.

b. Démontrer que pour tout x de I, $|h'(x)| \leqslant 0,42$.

2. Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 0,2$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = h(u_n)$.

a. En utilisant l'inégalité des accroissements finis, démontrer que, pour tout entier naturel n, on a : $|u_{n+1} - x_0| \leqslant 0,42\,|u_n - x_0|$.
À l'aide d'un raisonnement par récurrence, déduire que, pour tout entier naturel n on a : $|u_n - x_0| \leqslant 0,1 \times (0,42)^n$.

b. Déterminer la limite de (u_n) .

c. Déterminer un entier p tel que $\left|u_p - x_0\right| \leqslant 10^{-5}$.

d. On note b la valeur de u_p affichée sur la calculatrice. Déterminer β valeur décimale approchée par défaut de b à 10^{-5} près.
Classer par ordre croissant les réels $f(\beta)$, $f(\beta + 10^{-5})$ et 2.
En déduire la valeur décimale approchée par défaut de x_0 à 10^{-5} près.