☙ Baccalauréat Nouvelle Calédonie février 1968 ❧
Mathématiques élémentaires et mathématiques et technique

I.

Étudier les variations de la fonction

$$y = \cos^2 2x - 2\sin 2x + 2.$$

Construire le graphique de cette fonction par rapport à un système d'axes orthonormé, $x'\text{O}x$, $y'\text{O}y$.

II.

Calculer la partie réelle et la partie imaginaire du nombre complexe

$$Z = \frac{z^2 + z + 1}{z^4 - 1}$$

pour la valeur $z = 2 + 3\text{i}$.

III.

Le plan est rapporté à un système d'axes orthonormé, $x'\text{O}x$ et $y'\text{O}y$.
On considère le point fixe A, de coordonnées $(x = a, y = 0)$ et l'on note $\mathcal{T}_\text{A}$ la transformation définie comme suit :
M étant un point quelconque du plan, de coordonnées $(x\ ;\ y)$, on lui fait correspondre, lorsque cela est possible, le point M$'$ de coordonnées $(x'\ ;\ y')$, tel que M$'$ soit le conjugué harmonique de M par rapport aux points A et A$'$, A$'$ étant l'intersection de la droite AM avec l'axe $y'\text{O}y$ (on suppose $a \neq 0$).

1. Déterminer les coordonnées du point A$'$ en fonction de x, y et a.
   Montrer que les coordonnées du point M$'$ sont données par les formules

   $$x' = \frac{ax}{2x - a} \quad \text{et} \quad y' = \frac{ay}{2x - a}.$$

   Calculer les coordonnées de M en fonction de x', y' et a ; comparer avec les formules précédentes ; pouvait-on prévoir le résultat ?
   Déterminer les points doubles de la transformation $\mathcal{T}_\text{A}$
2. M décrivant la droite (D) d'équation

   $$ux + vy + w = 0,$$

   former l'équation du lieu, (D$'$), des points M$'$ correspondants ; que peut-on dire, en général, de l'intersection de (D) et (D$'$) ?
   Effectuer une étude purement géométrique et signaler les cas particuliers pouvant se présenter.
3. M décrivant le cercle de diamètre OA, former l'équation du lieu, (H), des points M$'$ correspondants ; préciser la nature géométrique de la courbe (H).
4. M$'$ étant le transformé d'un point M dans la transformation $\mathcal{T}_\text{A}$ précédemment définie, soit B un point fixe de l'axe $x'\text{O}x$, d'abscisse b (on suppose $b \neq 0$ et $b \neq a$).
   On désigne par P le conjugué harmonique de M$'$ par rapport aux points B et B$'$, B$'$ étant le point d'intersection de la droite BM$'$ avec l'axe $y'\text{O}y$: P est donc le transformé de M$'$ dans la transformation notée $\mathcal{T}_\text{B}$.

Calculer les coordonnées $(X\ ;\ Y)$ du point P en fonction de celles $(x\ ;\ y)$ du point M.

En déduire que les points M et P sont alignés avec l'origine, O.

Retrouver géométriquement ce résultat.

Soit Σ la transformation qui, au point M, associe le point P.

Exprimer la transformation Σ en fonction des transformations $\mathcal{T}_{\text{A}}$ et $\mathcal{T}_{\text{B}}$.

Soit P$'$ le symétrique du point P par rapport à l'axe $y'\text{O}y$.

Montrer qu'il existe un point C de l'axe $x'\text{O}x$ tel que la transformation qui, au point M, associe le point P$'$ soit précisément la transformation notée $\mathcal{T}_{\text{C}}$, définie à partir du point C comme le sont $\mathcal{T}_{\text{A}}$ et $\mathcal{T}_{\text{B}}$ à partir des points A et B respectivement.

L'ensemble des transformations $\mathcal{T}_{\text{A}}$ obtenues en prenant pour point A toute position distincte de O sur l'axe $x'\text{O}x$ possède-t-il une structure de groupe pour la loi produit des transformations.