∽ Baccalauréat S Nouvelle-Calédonie mars 1996 ∾

EXERCICE 1 **points**

On note $\mathscr{P}$ le plan complexe et $\mathscr{P}^\star$ ce plan privé du point A d'affixe $3 - \mathrm{i}$.
On note f l'application de $\mathscr{P}^\star$ dans $\mathscr{P}$ qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' défini par :

$$z' = \frac{2\mathrm{i}z - 4 + 2\mathrm{i}}{z - 3 + \mathrm{i}}.$$

1. Calculer l'affixe du point P′ image par f du point P d'affixe $1 + \mathrm{i}$.
2. Calculer l'affixe du point Q dont l'image est le point Q′ d'affixe $1 + \mathrm{i}$.
3. Déterminer et représenter les ensembles de points M d'affixe z tels que :
   a. z' soit réel
   b. z' soit imaginaire pur
   c. z' soit de module 2

EXERCICE 2 **points**
Enseignement obligatoire

Soit ABCD un quadrilatère, I le milieu de [AC], J le milieu de [BD]. Soit K le point tel que $\overrightarrow{\mathrm{KA}} = -2\overrightarrow{\mathrm{KB}}$, L le point tel que $\overrightarrow{\mathrm{LC}} = -2\overrightarrow{\mathrm{LD}}$, et M le milieu de [LK].

Le but du problème est de montrer que M, I, J sont alignés et de donner la position de M sur la droite (IJ).

1. Justifier l'existence du barycentre G du système :

$$(\mathrm{A}, 1),\ (\mathrm{B},\ 2),\ (\mathrm{C},\ 1),\ (\mathrm{D},\ 2).$$

   En regroupant les points de différentes façons, montrer que G appartient aux deux droites (KL) et (IJ).
2. Montrer que G est en M, que M, I, J sont alignés et donner la position de M sur (IJ).
3. Faire une figure soignée où tous les points considérés seront reportés.

EXERCICE 2 **points**
Enseignement de spécialité

Le plan $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}\ ;\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$ et représente l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = 1$.
   Montrer que les images des solutions sont les sommets d'un triangle équilatéral de centre O.
2. On considère la transformation s de $\mathscr{P}$ dont l'expression complexe est

$$z' = \mathrm{i}\sqrt{2}(2z + 1).$$

   a. Déterminer la nature géométrique de s et préciser ses éléments.
   b. On pose A $= s(\alpha)$, B $= s(\beta)$, C $= s(\gamma)$, où α, β, γ sont les trois points d'affixes respectives 1, $\mathrm{e}^{-\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}$, $\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}$.
   Montrer que ABC est un triangle équilatéral et déterminer l'affixe de son centre Ω.
3. Soit F le point d'affixe 2 et D la droite d'équation $x = 3$.
   Pour tout point M de $\mathscr{P}$ on appelle H son projeté orthogonal sur la droite D.

a. Montrer que l'ensemble (E) des points M de $\mathcal{P}$ vérifiant $3\text{MF}^2 = 2\text{MH}^2$ est une conique passant par B, C et Ω, dont on précisera la nature.

b. En déduire sans calculs le centre et les sommets de (E).

c. Tracer sur une même figure le triangle ABC et la conique (E) (unités : 2 cm).

Problème **points**

Partie A.

On désigne par f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \text{e}^{\frac{x}{2}} - \text{e}^{x}$$

et on appelle $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans le repère $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.

1. Étudier les variations de f.
   Préciser les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Déterminer le signe de $f(x)$ en fonction de x.
3. Tracer la courbe $\mathcal{C}$.

Partie B.

Dans cette partie on se propose d'étudier la fonction g définie sur $\mathbb{R} - \{0\}$ par

$$g(x) = \ln\left|\text{e}^{\frac{x}{2}} - \text{e}^{x}\right|.$$

On note Γ la courbe représentative de g dans le repère $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.

1. Préciser les limites de g en $-\infty$, en $+\infty$ et en 0.
2. Calculer $g'(x)$ et déterminer le signe de $g'(x)$ en utilisant le signe de $f'(x)$ et le signe de $f(x)$.
   Dresser le tableau de variations de g.
3. Démonter que pour tout x réel strictement positif :
   $$g(x) - x = \ln\left(1 - \text{e}^{-\frac{x}{2}}\right).$$
   Montrer que la droite D d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe Γ.
   Étudier la position de la courbe Γ par rapport à D pour tout x réel strictement positif.
4. Démontrer que pour tout x réel strictement négatif :
   $$g(x) - \frac{x}{2} = \ln\left(1 - \text{e}^{\frac{x}{2}}\right).$$
   Montrer que la droite Δ d'équation $y = \dfrac{x}{2}$ est asymptote à la courbe Γ.
   Étudier la position de Γ par rapport à Δ pour tout x réel strictement négatif.
5. Construire Γ, D et Δ dans le repère $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$. (On utilisera un graphique différent de celui de la partie A.)