

Baccalauréat S Nouvelle-Calédonie
novembre 1995

EXERCICE 1

4 points

Soit ABCD un quadrilatère, I le milieu de [AC], J le milieu de [BD]. Soit K le point tel que $\overrightarrow{KA} = -2\overrightarrow{KB}$, L le point tel que $\overrightarrow{LC} = -2\overrightarrow{LD}$, et M le milieu de [LK].

Le but du problème est de montrer que M, I, J sont alignés et de donner la position de M sur la droite (IJ).

1. Justifier l'existence du barycentre G du système :

$$\{(A, 1), (B, 2), (C, 1), (D, 2)\}.$$

En regroupant les points de différentes façons, montrer que G appartient aux deux droites (KL) et (IJ).

2. Montrer que G est en M, que M, I, J sont alignés et donner la position de M sur (IJ).
3. Faire une figure soignée où tous les points considérés seront reportés.

EXERCICE 2

4 points

Enseignement obligatoire

On note $\mathcal{P}$ le plan complexe et $\mathcal{P}^*$ ce plan privé du point A d'affixe $3 - i$. On note f l'application de $\mathcal{P}^*$ dans $\mathcal{P}$ qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' défini par :

$$z' = \frac{2iz - 4 + 2i}{z - 3 + i}.$$

1. Calculer l'affixe du point P' image par f du point P d'affixe $1 + i$.
2. Calculer l'affixe du point Q dont l'image est le point Q' d'affixe $1 + i$.
3. Déterminer et représenter les ensembles de points M d'affixe z tels que :
 - a. z' soit réel
 - b. z' soit imaginaire pur
 - c. z' soit de module 2.

EXERCICE 2

4 points

Enseignement de spécialité

Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$ et représente l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = 1$. Montrer que les images des solutions sont les sommets d'un triangle équilatéral de centre O.
2. On considère la transformation s de $\mathcal{P}$ dont l'expression complexe est $z' = i\sqrt{2}(2z + 1)$.
 - a. Déterminer la nature géométrique de s et préciser ses éléments.
 - b. On pose $A = s(\alpha)$, $B = s(\beta)$, $C = s(\gamma)$, où α, β, γ sont les trois points d'affixes respectives $1, e^{-\frac{2i\pi}{3}}, e^{\frac{2i\pi}{3}}$.
Montrer que ABC est un triangle équilatéral et déterminer l'affixe de son centre Ω .
3. Soit F le point d'affixe 2 et D la droite d'équation $x = 3$. Pour tout point M de $\mathcal{P}$, on appelle H son projeté orthogonal sur la droite D.
 - a. Montrer que l'ensemble (E) des points M de $\mathcal{P}$ vérifiant $3MF^2 = 2MH^2$ est une conique passant par B, C et Ω , dont on précisera la nature.

- b. En déduire sans calculs le centre et les sommets de (E).
- c. Tracer sur une même figure le triangle ABC et la conique (E) (unités : 2 cm).

PROBLÈME

4 points

Les trois parties du problème peuvent être traitées séparément

Partie A

On considère l'équation différentielle

$$(E) \quad y'' - 4y' + 4y = 0.$$

1. Résoudre l'équation (E).
2. Déterminer les solutions de (E) dont la dérivée s'annule en 0.
3. Déterminer la solution de (E) dont la courbe représentative (C) dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ admet une tangente horizontale en A, point de coordonnées (0 ; 1).

Partie B

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (1 - 2x)e^{2x}.$$

1. Étudier les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Calculer $f'(x)$, étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$. Dresser le tableau de variations de f .
3. Tracer la courbe représentative ($\mathcal{C}$) de f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unités : 2 cm).
4. Calculer, en cm^2 , l'aire de la partie du plan comprise entre les droites d'équations $x = 0$, $x = \frac{1}{2}$, $y = 0$ et la courbe ($\mathcal{C}$). On utilisera une intégration par parties.

Partie C

La fonction f est toujours celle définie dans la partie B.

On note $f^{(1)} = f'$, $f^{(2)} = f''$, $f^{(3)} = f'''$, ..., $f^{(n)}$ les dérivées successives de f .

1. Calculer $f^{(2)}(x)$ et $f^{(3)}(x)$.
2. Montrer par récurrence sur l'entier non nul n , que

$$f^{(n)}(x) = 2^n(1 - n - 2x)e^{2x}.$$

3. Pour tout entier n non nul, la courbe représentative de $f^{(n)}$ admet une tangente horizontale en un point M_n .
 - a. Calculer les coordonnées x_n et y_n de M_n . Vérifier que les points M_n appartiennent à la courbe (Γ) d'équation

$$y = \frac{e^{2x}}{4^x}.$$

- b. Vérifier que la suite (x_n) est une suite arithmétique dont on donnera le premier terme et la raison. Étudier la limite de la suite (x_n) .
- c. Vérifier que la suite (y_n) est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison. Étudier la limite de la suite (y_n) .