Baccalauréat S Nouvelle-Calédonie novembre 1995

EXERCICE 1 **4 points**

Soit ABCD un quadrilatère, I le milieu de [AC], J le milieu de [BD]. Soit K le point tel que $\overrightarrow{\text{KA}} = -2\overrightarrow{\text{KB}}$, L le point tel que $\overrightarrow{\text{LC}} = -2\overrightarrow{\text{LD}}$, et M le milieu de [LK].

Le but du problème est de montrer que M, I, J sont alignés et de donner la position de M sur la droite (IJ).

1. Justifier l'existence du barycentre G du système :

$$\{(\text{A}, 1), (\text{B}, 2), (\text{C}, 1), (\text{D}, 2)\}.$$

   En regroupant les points de différentes façons, montrer que G appartient aux deux droites (KL) et (IJ).
2. Montrer que G est en M, que M, I, J sont alignés et donner la position de M sur (IJ).
3. Faire une figure soignée où tous les points considérés seront reportés.

EXERCICE 2 **4 points**
Enseignement obligatoire

On note $\mathcal{P}$ le plan complexe et $\mathcal{P}^\star$ ce plan privé du point A d'affixe $3 - \text{i}$. On note f l'application de $\mathcal{P}^\star$ dans $\mathcal{P}$ qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' défini par :

$$z' = \frac{2\text{i}z - 4 + 2\text{i}}{z - 3 + \text{i}}.$$

1. Calculer l'affixe du point P$'$ image par f du point P d'affixe $1 + \text{i}$.
2. Calculer l'affixe du point Q dont l'image est le point Q' d'affixe $1 + \text{i}$.
3. Déterminer et représenter les ensembles de points M d'affixe z tels que :
   a. z' soit réel
   b. z' soit imaginaire pur
   c. z' soit de module 2.

EXERCICE 2 **4 points**
Enseignement de spécialité

Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}~;~\vec{u},~\vec{v}\right)$ et représente l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = 1$. Montrer que les images des solutions sont les sommets d'un triangle équilatéral de centre O.
2. On considère la transformation s de $\mathcal{P}$ dont l'expression complexe est
   $z' = \text{i}\sqrt{2}(2z + 1)$.
   a. Déterminer la nature géométrique de s et préciser ses éléments.
   b. On pose $\text{A} = s(\alpha)$, $\text{B} = s(\beta)$, $\text{C} = s(\gamma)$, où α, β, γ sont les trois points d'affixes respectives 1, $\text{e}^{-\frac{2\text{i}\pi}{3}}$, $\text{e}^{\frac{2\text{i}\pi}{3}}$.
   Montrer que ABC est un triangle équilatéral et déterminer l'affixe de son centre Ω.
3. Soit F le point d'affixe 2 et D la droite d'équation $x = 3$. Pour tout point M de $\mathcal{P}$, on appelle H son projeté orthogonal sur la droite D.
   a. Montrer que l'ensemble (E) des points M de $\mathcal{P}$ vérifiant $3M\text{F}^2 = 2M\text{H}^2$ est une conique passant par B, C et Ω, dont on précisera la nature.

b. En déduire sans calculs le centre et les sommets de (E).

c. Tracer sur une même figure le triangle ABC et la conique (E) (unités : 2 cm).

PROBLÈME **4 points**

Les trois parties du problème peuvent être traitées séparément

Partie A

On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad y'' - 4y' + 4y = 0.$$

1. Résoudre l'équation (E).
2. Déterminer les solutions de (E) dont la dérivée s'annule en 0.
3. Déterminer la solution de (E) dont la courbe représentative (C) dans un repère orthonormal $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ admet une tangente horizontale en A, point de coordonnées $(0~;~1)$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (1-2x)\text{e}^{2x}.$$

1. Étudier les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Calculer $f'(x)$, étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$. Dresser le tableau de variations de f.
3. Tracer la courbe représentative $(\mathscr{C})$ de f dans un repère orthonormal $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ (unités : 2 cm).
4. Calculer, en cm^2, l'aire de la partie du plan comprise entre les droites d'équations $x = 0$, $x = \frac{1}{2}$, $y = 0$ et la courbe $(\mathscr{C})$. On utilisera une intégration par parties.

Partie C

La fonction f est toujours celle définie dans la partie B.
On note $f^{(1)} = f'$, $f^{(2)} = f''$, $f^{(3)} = f'''$, ..., $f^{(n)}$ les dérivées successives de f.

1. Calculer $f^{(2)}(x)$ et $f^{(3)}(x)$.
2. Montrer par récurrence sur l'entier non nul n, que
$$f^{(n)}(x) = 2^n(1-n-2x)\text{e}^{2x}.$$
3. Pour tout entier n non nul, la courbe représentative de $f^{(n)}$ admet une tangente horizontale en un point M_n.
   a. Calculer les coordonnées x_n et y_n de M_n. Vérifier que les points M_n appartiennent à la courbe (Γ) d'équation
   $$y = \frac{\text{e}^{2x}}{4^x}.$$
   b. Vérifier que la suite (x_n) est une suite arithmétique dont on donnera le premier terme et la raison. Étudier la limite de la suite (x_n).
   c. Vérifier que la suite $\left(y_n\right)$ est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison. Étudier la limite de la suite $\left(y_n\right)$.