Terminale ES Nouvelle-Calédonie novembre 1995

EXERCICE 1 **4 points**

Le niveau sonore $d(I)$, en décibels (db), d'un son d'intensité I est donné par la formule :
$d(I) = \dfrac{10}{\ln 10}\left(\ln I - \ln I_0\right)$, où I_0 est l'intensité du seuil d'audibilité de l'oreille humaine.

1. Une voix humaine produit un son dont l'intensité I est égale à $10^6 I_0$.
   Calculer le niveau sonore $d(I)$, en décibels, atteint par cette voix humaine.
2. Calculer $\dfrac{I_1}{I_0}$, $\dfrac{I_2}{I_0}$ puis $\dfrac{I_2}{I_1}$ lorsque :
   I_1 correspond à un niveau sonore de 90 db (au-delà de ce niveau, on considère qu'il y a danger et risque de surdité).
   I_2 correspond à un niveau sonore de 120 db (c'est le niveau sonore atteint par un concert des « Who » en 1976).
3. Dans cette question, I_1 et I_2 désignent des intensités quelconques ; on suppose $I_1 \leqslant I_2$.
   a. Montrer que $d(I_2) - d(I_1) = \dfrac{10}{\ln 10}\left(\ln I_2 - \ln I_1\right)$.
   b. Calculer cette différence $d(I_2) - d(I_1)$, arrondie au dixième le plus proche, lorsque $I_2 = 2I_1$.
   c. Déterminer $\dfrac{I_2}{I_1}$ lorsque $d(I_2) - d(I_1) = 15$, puis justifier l'affirmation suivante :
   « 115 décibels, c'est environ 32 fois plus fort que 100 décibels ».

EXERCICE 2 **5 points**
Enseignement obligatoire

Au secrétariat d'un lycée, chaque élève a un dossier scolaire. Tous ces dossiers sont regroupés dans une même armoire. On a les données suivantes :

— 20 % des élèves de ce lycée sont internes, 50 % sont demi-pensionnaires et 30 % sont externes ;
— 60 % des internes sont des garçons ;
— 50 % des demi-pensionnaires sont des filles ;
— 10 % des externes sont des garçons.

1. On extrait au hasard un dossier d'élève de l'armoire. Quelle est la probabilité d'obtenir le dossier :
   a. d'une fille interne ?
   b. d'une fille ?
   c. d'un garçon ?
   d. d'un demi-pensionnaire sachant que c'est le dossier d'une fille ?
2. Soit A l'évènement « le dossier extrait est celui d'un garçon externe ».
   Montrer que la probabilité de A est égale à 0,03.
3. On extrait au hasard un dossier de l'armoire, on regarde ce que l'on obtient, puis on le replace dans l'armoire. On répète cinq fois cette expérience.
   a. Quelle est la probabilité d'obtenir ainsi, les dossiers de cinq garçons externes ?
   b. Quelle est la probabilité d'obtenir ainsi, les dossiers de cinq garçons externes ?

EXERCICE 2 **5 points**
Enseignement de spécialité

On a rangé en vrac dans une boîte neuf cartes postales indiscernables au toucher. Cinq de ces cartes proviennent de France, une provient d'Australie et trois des États-Unis.

Partie A - On tire simultanément et au hasard 3 cartes de la boîte.

1. Montrer que la probabilité de n'obtenir aucune carte de France parmi les 3 cartes tirées est égale à $\dfrac{1}{21}$.
2. Calculer la probabilité des évènements suivants :

   E1 : « Lors d'un tirage, obtenir une carte de chaque pays ».

   E2 : « Lors d'un tirage, obtenir au moins une carte de France ».
3. Soit X la variable aléatoire qui associe, à chaque tirage de 3 cartes de la boîte, le nombre de cartes de France obtenues.
   Déterminer la loi de probabilité de X. Les différentes probabilités seront données sous forme de fractions irréductibles et le résultats seront rassemblés dans un tableau.

Partie B -

1. On répète ce tirage cinq fois de suite en remettant à chaque fois les 3 cartes tirées dans la boîte.
   Quelle est la probabilité de l'évènement : « lors de ces cinq tirages, deux fois et deux fois seulement, on n'obtient aucune carte de France ».
   Donner une valeur approchée à 10^{-3} près du résultat.
2. On répète ce tirage n fois de suite en remettant à chaque foi les 3 cartes tirées dans la boîte.
   À partir de quelle valeur de n, la probabilité d'obtenir au moins un tirage sans carte de France est-elle supérieure ou égale à $0,95$?

PROBLÈME **5 points**

La fonction f est une fonction numérique définie sur l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$.
On sait qu'il existe deux réels a et b tels que :

$$\text{pour tout } x > -1,\ f(x) = 2 + \frac{a}{(x+1)} + \frac{b}{(x+1)^2},$$

de plus, le tableau de variation de f est donné ci-dessous (où f' désigne la fonction dérivée de f) :

x	-1		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$		$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$\frac{9}{4}$	↘	2

1. **a.** Calculer $f'(x)$ en fonction de a et b.

   b. En utilisant les données du tableau de variation de f et la question a., déterminer les réels a et b.

   On trouve donc : pour tout $x > -1$,

   $$f(x) = 2 + \frac{1}{(x+1)} + \frac{1}{(x+1)^2}.$$
2. Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une seule solution α et que α appartient à l'intervalle $[-0,5\,;\,0]$. Donner une valeur approchée décimale de α à 10^{-1} près par défaut.
3. Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ (unité graphique : 2 cm).
   Soit (C) la courbe représentative de f dans ce repère. Déduire du tableau de variation de f que (C) possède deux asymptotes (d_1) et (d_2) dont on donnera une équation. Construire (C), (d_1) et (d_2).

4. **a.** Étudier le signe de $f(x)$ sur $]-1\ ;\ +\infty[$ en utilisant le tableau de variation.

   b. Déterminer une primitive de f sur $]-1\ ;\ +\infty[$.

   c. Calculer l'aire, en cm^2, de la partie du plan située entre la courbé (C), l'axe des abscisses du repère et les droites d' équations $x = -\dfrac{1}{2}$ et $x = 1$.

5. Soit g la fonction définie sur $\left]-\frac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$ par $g(x) = \ln(f(x))$. En utilisant les fonctions composées, déduire les variations de g de celles de f.