

Quelques éléments d'histoire des nombres négatifs

Anne BOYÉ

Le texte qui suit est une deuxième version, complétée et améliorée, d'un article paru en 2002, dans *Proyecto Penélope, El papel de la historia de la Ciencia en la Enseñanza Secundaria*, résultat d'un travail dans le cadre du projet européen Comenius « Enseignements interdisciplinaires européens de l'histoire des sciences au lycée », et de l'université d'été qui s'en est suivie, à La Orotava, à Tenerife, en juillet 2001. Une version abrégée est disponible sur le site <http://nti.educa.rcanaria.es/penelope> .

« Ces idées sont très élémentaires ; néanmoins, il n'est pas si aisé qu'il pourrait le paraître d'abord de les établir d'une manière bien lumineuse, et d'y donner cette généralité que demande leur application aux calculs. On ne peut d'ailleurs douter de la difficulté du sujet, si l'on réfléchit que les sciences exactes avaient été cultivées pendant un grand nombre de siècles, et qu'elles avaient fait de grands progrès avant qu'on eût acquis les véritables notions des quantités négatives, et qu'on eût conçu la manière générale de les employer. »

Argand, *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques*, 1806

Chacun conserve plus ou moins dans un coin de sa mémoire des moments de son éducation mathématique ; parmi ceux-ci, il y a fort probablement une petite place pour les négatifs. Certains, qui ont continué longtemps de pratiquer les mathématiques, ou les pratiquent toujours, ont peut-être perdu le souvenir de leurs premières interrogations, tant les négatifs leur sont devenus anodins. Pour d'autres, cela fait partie des notions obscures, sur lesquelles ils ont appris des règles, parce qu'il fallait bien s'en sortir, mais sans trop comprendre le fond des choses, sans trop en parler pour autant, car dans tous les cas, les nombres négatifs font partie des notions élémentaires des mathématiques, c'est un fait acquis.

Pourtant est-il si facile d'admettre que -5 soit inférieur à 2 ? (Pourquoi une dette de 5 euros serait-elle plus petite qu'un gain de deux euros ?) Comment peut-on ajouter quelque chose à 5 pour obtenir 2 ? Comment la lettre « a » peut-elle désigner quelque chose de négatif, alors qu'il n'y a aucun signe « $-$ » ?

Argand, un mathématicien français important du XIX^e siècle, notait qu'il avait fallu plusieurs siècles pour acquérir « les véritables notions des quantités négatives ». Et lui-même ne concevait pas vraiment le nombre négatif.

C'est bien là la question : *qu'est-ce qu'un nombre négatif ?*

Il est habituel de penser que les mathématiques, et le nombre en particulier, se sont construits sur des observations concrètes. Dans ce cas, il n'y aurait sans doute aucune raison pour que les nombres négatifs aient jamais été introduits.

Considérons par exemple le nombre « deux ». Nous pouvons le penser comme une sorte de propriété abstraite de tous les ensembles de deux objets ; ce qui déjà, en soi, est une pensée profonde. Ajouter deux pommes à trois pommes est une chose. Mais, penser qu'il existe une propriété des nombres deux et trois, qui s'applique à tous les ensembles de deux ou trois éléments, et que « $2 + 3 = 5$ » est un théorème général, valable dans tous les cas, que l'on considère des ensembles de pommes, de livres, de bonbons, ... Cette pensée caractérise le passage du comptage à l'abstraction mathématique.

Nous nous apercevons bien que la notion abstraite de nombre positif pose elle-même des difficultés non triviales de conceptualisation. Or, les nombres négatifs n'ont pas ce type de représentation concrète sur laquelle on peut construire une abstraction. Même si nous pensons aux notions « élémentaires » de dettes et de gains, il sera plutôt question d'une dette de 3 euros et non pas un gain de -3 euros !

Il n'est pas étonnant alors que l'introduction des nombres négatifs ait demandé de longs siècles d'interrogation. L'introduction conceptuelle des nombres négatifs a été effectivement un processus d'une lenteur surprenante.

Nous vous proposons, par un regard sur l'histoire, de mieux comprendre ces siècles d'interrogation, et de saisir peut-être mieux ce qu'est un nombre négatif, voire, un nombre tout simplement. Il nous viendra vite à l'idée que le premier obstacle à la notion de négatif est l'absence du « zéro ».

Il ne peut y avoir bien sûr de nombre négatif sans la présence d'un zéro. Il semble assez répandu que les hindous, par exemple, ont utilisé le zéro bien avant nous. Donc, peut-être connaissaient-ils les négatifs ? Nous y reviendrons.

Cependant, en Europe, les mathématiciens disposent du zéro depuis le XIV^e siècle, et il faudra attendre la fin du XV^e siècle pour voir apparaître des êtres numériques non positifs, qui ne seront pas pour autant acceptés comme nombres à part entière. Très rapidement les règles d'utilisation seront établies, et les mathématiciens manipuleront ces quantités, mais ils en auront une compréhension très partielle, avec d'étonnantes lacunes. On leur dénie l'existence en tant que quantités réelles. Ils seront longtemps un outil de calcul, facilitant la résolution des équations, pour lesquelles par ailleurs on ne retiendra que les solutions positives.

Plusieurs obstacles peuvent expliquer cette difficulté de reconnaissance.

Un des obstacles le plus évident sera le zéro absolu, en dessous duquel il n'y a rien. Cette difficulté est particulièrement pointée, par exemple par le mathématicien français Lazare Marguerite Carnot (1753-1823), membre de l'Académie des Sciences et mathématicien renommé :

« Pour obtenir réellement une quantité négative isolée, il faudrait retrancher une quantité effective de zéro, ôter quelque chose de rien : opération impossible. Comment donc concevoir une quantité négative isolée ? »

Géométrie de position, 1803

Un auteur de manuel de mathématiques du XIX^e siècle, F. Buset, ira jusqu'à faire porter l'échec de l'enseignement des mathématiques en France sur l'admission des quantités négatives. Il est choqué que l'on discute de savoir s'il existe « *des quantités plus petites que rien* ». C'est pour lui « *le comble de l'aberration de la raison humaine* ».

Il existe une sorte d'empêchement de manier le zéro origine, à côté du zéro absolu.

Dans les textes précédents, il a pu être noté que l'on ne parle pas de nombres négatifs mais de quantités. Les nombres ne peuvent être que positifs ; ce sont les quantités qui peuvent être négatives ou positives. Une quantité négative se définit par une opposition à une quantité positive : un chemin dans une direction, un chemin dans la direction contraire ; un gain, une dette...

C'est cette lente naissance des quantités négatives, et les obstacles qu'il a fallu franchir pour atteindre la notion abstraite de nombre négatif, qui font l'objet de ce qui suit.

1 Utilisation des nombres négatifs en mathématiques

Ainsi que nous l'avons évoqué, il est courant d'estimer que la notion de nombre négatif est née de besoins comptables (gains et dettes).

Les Chinois semblent avoir utilisé depuis le premier siècle de notre ère les « nombres négatifs ». Sur les tables à calcul, le plus souvent, des baguettes noires les représentent ; des baguettes rouges représentent les positifs. Cependant ils n'apparaissent que comme des auxiliaires de calcul, il n'y a pas de nombre négatif dans les énoncés de problèmes, il n'y en pas non plus dans les réponses.

Ils apparaissent aussi chez les **mathématiciens indiens** (Hindous) des VI^e et VII^e siècles ; par exemple, nous les trouvons dans les écrits de **Bramagupta** (VII^e siècle). Il y enseigne la façon de faire des additions, des soustractions, etc. sur les biens, les dettes, le néant.

« Une dette retranchée du néant devient un bien, un bien retranché du néant devient une dette. »

Les règles de calcul sont données ; mais on ne se préoccupe pas de les justifier.

Les « nombres négatifs » vont ainsi apparaître dans les calculs, et les mathématiciens tout au long de l'histoire vont s'enhardir à pratiquer de mieux en mieux des opérations sur ces « nombres », lors même que les règles ne sont pas clairement établies.

En Occident, ils apparaissent donc à la fin du XV^e siècle, lors de la résolution des équations, par exemple dans les écrits du mathématicien italien Cardan (1501-1576).

« Cardan est encore le premier qui ait aperçu la multiplicité des valeurs de l'inconnue dans les équations, et leur distinction en positives et négatives. Cette découverte qui, avec une autre de Viète, est le fondement de toutes celles d'Harriot et Descartes sur l'analyse des équations, cette découverte, dis-je, est clairement contenue dans son Ars Magna. Dès l'article troisième, il observe que la racine d'un carré est également plus ou moins le côté de ce carré, et dans l'article 7 il propose une équation qui, réduite à notre langage, serait $x^2 + 4x = 21$, et il remarque que la valeur de x est également $+3$ ou -7 , et qu'en changeant le signe du second terme, elle devient -3 ou $+7$. Ces racines négatives, il les nomme feintes. Cardan redressera en cela l'erreur de Pacioli, qui n'ayant fait aucune mention de ces racines négatives, semble ne les avoir pas remarquées. »

J. F. Montucla, *Histoire des mathématiques*, 1758

Cependant à la même époque, d'autres mathématiciens, comme le français Viète (1540-1603), ne donneront que les solutions positives des équations.

Les règles de calcul sont construites en prolongement des règles sur les positifs, et, tout au long de l'histoire, les mathématiciens pratiqueront de mieux en mieux ces calculs, mais avec une certaine gêne, car il s'agit en fait le plus souvent de règles de calcul concernant des quantités ou des grandeurs que l'on ajoute ou retranche, et non de **nombres** positifs ou négatifs.

Cardan exprime ainsi ses doutes :

« C'est un simple conseil de ne pas confondre les quantités défailantes avec les quantités abondantes. Il faut ajouter entre elles les quantités abondantes, ajouter entre elles aussi les quantités défailantes, et retrancher les quantités défailantes des quantités abondantes, mais en tenant compte des espèces, c'est-à-dire n'opérer que sur des semblables ; combiner les nombres entre eux, aussi les carrés, de même les cubes, etc. »

Ars Magna, 1545

On imagine un peu un livre de comptes dans lequel on écrit dans une colonne les dépenses, dans l'autre les recettes, en veillant surtout à ne pas les mélanger, comme les baguettes noires et rouges des chinois.

Clairaut (1713-1765), aussi, sur ce sujet, donne ses règles, dans ses *Eléments d'algèbre* de 1746 :
« On demandera peut-être si on peut ajouter du négatif avec du positif, ou plutôt si on peut dire qu'on ajoute du négatif. A quoi je réponds que cette expression est exacte quand on ne confond point ajouter avec augmenter. Que deux personnes par exemple joignent leurs fortunes, quelles qu'elles soient, je dirai que c'est là ajouter leurs biens, que l'un ait des dettes et des effets réels, si les dettes surpassent les effets, il ne possédera que du négatif, et la jonction de la fortune à celle du premier diminuera le bien de celui-ci, en sorte que la somme se trouvera, ou moindre que ce que possédait le premier, ou même entièrement négative. »

Ceci met en relief la confusion entre le signe de l'opération et le signe du nombre, et la différenciation entre ajouter et augmenter, difficultés qui sont réelles, dès que l'on commence à enseigner le négatif. La distinction ne sera vraiment faite qu'à la fin du XIX^e siècle, mais le problème pédagogique persistera.

A partir de l'époque de Viète, au début du XVII^e siècle, les règles sur le calcul littéral seront parfaitement maîtrisées, mais les lettres représentent toujours des quantités positives et jamais des négatives. On ne peut donc trouver comme solution d'une équation par exemple $x = -3$; ce serait absurde.

2 Obstacles à la compréhension des nombres négatifs

Nous avons déjà évoqué le problème du zéro absolu et du zéro relatif.

Il y a par exemple dans le *Dictionnaire de mathématiques* de J. Ozanam, de 1691, une vingtaine de sortes de nombres, les entiers, les *rompus* (fractionnaires), les *incommensurables*, les *sourds*, . . . , et les négatifs ne sont pas mentionnés. Ils apparaissent dans les résolutions d'équations, mais ils sont alors qualifiés de racines *fausses*, *feintes*, à côté des *vraies*, qui sont les positives. La racine fautive est la valeur niée de la lettre inconnue de l'équation.

Voici comment Descartes présente les différentes solutions d'une équation :

« Mais souvent il arrive, que quelques-unes de ces racines sont fausses, ou moindres que rien, comme si on suppose que x désigne aussi le défaut d'une quantité, qui soit 5, on a $x + 5 \propto 0$, qui étant multipliée par $x^3 - 9xx + 26x - 24 \propto 0$ fait $x^4 - 4x^3 - 19xx + 106x - 120 \propto 0$, pour une équation en laquelle il y a quatre racines, à savoir trois vraies qui sont 2, 3, 4, et une fautive qui est 5. »

Descartes, *La géométrie*, 1637

Nous remarquerons que dans ce texte, Descartes parle d'une *racine fautive* qui est 5.

Les solutions négatives des équations posent des problèmes aux mathématiciens, car il faut les interpréter.

Voici un exemple de ce que propose De Morgan (1806-1871), en 1831, devant des solutions négatives d'un problème :

« L'expression imaginaire $\sqrt{-a}$ et l'expression négative $-b$ se ressemblent en cela que chacune d'elles, lorsqu'elle apparaît comme solution d'un problème, indique qu'il y a là quelque inconsistance ou absurdité. Pour ce qui concerne la réalité de leur signification, toutes deux sont également imaginaires puisque $0 - a$ est tout aussi inconcevable que $\sqrt{-a}$.

Un exemple. Un père a 56 ans et son petit fils en a 29. Dans combien d'années l'âge du père sera-t-il le double de celui de son fils ?

Soit x le nombre d'années ; x vérifie : $56 + x = 2(29 + x)$. Nous trouvons $x = -2$.

Ce résultat est absurde mais si nous changeons x en $-x$ et si nous résolvons : $56 - x = 2(29 - x)$ nous trouvons $x = 2$. La réponse négative montre que nous avons commis une erreur dans la première formulation de l'équation. Lorsque la réponse à un problème est négative, en changeant le signe de x dans l'équation qui a produit ce résultat, nous pouvons découvrir qu'une erreur a été commise dans la méthode utilisée pour former cette équation ou montrer que la question posée par le problème est trop limitée. »

On admet les quantités négatives dans les calculs, comme auxiliaires obligatoires, bien qu'elles n'aient aucun sens par elles-mêmes. C'est exactement la même position que celle des imaginaires (que nous nommons de nos jours les nombres complexes). Le malaise se manifeste particulièrement dans les écrits à caractère pédagogique, car les auteurs n'arrivent pas à donner d'explications satisfaisantes.

Remarquons que jusqu'au XVIII^e siècle il y a peu d'occasions de manipuler des « nombres » négatifs qui ont un sens physique. En 1730, Réaumur réalise le premier thermomètre scientifique et il faudra encore un siècle pour que le grand public s'habitue à des températures en dessous de zéro. En 1713, Fahrenheit s'arrange pour que ces sortes de températures soient évitées.

Certains, malgré tout, gardent des sentiments très prudents, voire hostiles devant l'usage des quantités négatives, qui ne sont définitivement pas des nombres.

Voici comment l'exprime Maclaurin (1698-1746), dans son *Traité des fluxions*, en 1742 :

« L'usage du signe négatif en algèbre donne lieu à plusieurs conséquences qu'on a d'abord peine à admettre et ont donné l'occasion à des idées qui paraissent n'avoir aucun fondement réel. »

Voici quelques-unes de ces idées :

Pascal (1623-1662), dans ses *Pensées* : *« Trop de vérité nous étonne ; j'en sais qui ne peuvent comprendre que, qui de zéro ôte 4, reste zéro. »*

Arnauld (un ami de Pascal), à propos de l'égalité $\frac{-1}{1} = \frac{1}{-1}$: *« Comment un nombre plus petit pourrait-il être à un plus grand comme un plus grand à un plus petit ? »*

Wallis (1616-1703) : *« a étant un nombre positif, le quotient $\frac{a}{0}$ est infini ; comme $\frac{a}{-1}$ est plus grand, le dénominateur étant plus petit, il est plus grand que l'infini tout en étant inférieur à zéro, car le résultat est négatif. »*

Et voici une réaction franchement hostile, de Francis Maseres, mathématicien anglais, dans sa *Dissertation sur l'utilisation du signe négatif en algèbre* (1759) : *« Elles servent seulement pour autant que je sois capable d'en juger, à obscurcir la doctrine tout entière des équations et à rendre ténébreuses des choses qui sont dans leur nature excessivement évidentes et simples. Il eût été souhaitable en conséquence que les racines négatives n'aient jamais été admises dans l'algèbre ou qu'elles en aient été écartées. »*

Devant de tels obstacles, se font jour alors des stratégies d'évitement.

- Dans l'écriture des équations : par exemple, il y aura plusieurs types d'équations du second degré, que nous pouvons citer avec notre écriture algébrique contemporaine :

$$x^2 + px = q$$

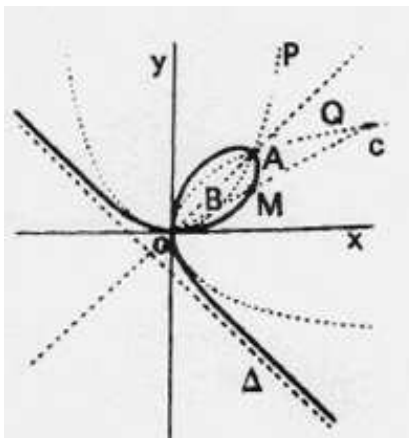
$$x^2 + q = px$$

$$x^2 = px + q$$

($x^2 = px$ n'est pas vraiment du second degré; le zéro (0), comme solution, mettra très longtemps à être accepté puisqu'il signifie « rien ».)

p et q représentent des nombres donc ils sont par essence positifs.

- Pour le choix d'axes pour repérer les points :
soit on ne tient pas compte de la partie de courbe correspondant à des x ou des y négatifs (par exemple, la courbe qui porte le nom de *Folium de Descartes*, ainsi nommée car elle représente la cubique d'équation $x^3 + y^3 = 3axy$, avec x et y positifs) (*voir le dessin*), soit on s'arrange pour choisir des axes pour lesquels la courbe considérée ne correspond qu'à des coordonnées positives. Il faudra attendre le XVIII^e siècle, pour que Maclaurin, et surtout Euler, expliquent comment l'on peut prendre des coordonnées négatives; il s'agit d'une approche timide de ce qui sera appelé « la droite des réels ».

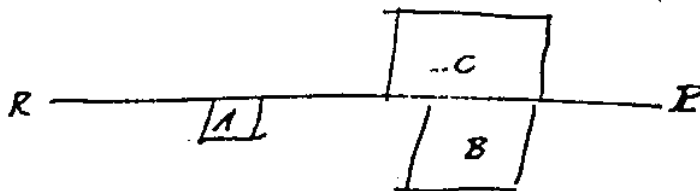


- Pour ne pas avoir à accepter une solution négative pour un problème, presque jusqu'au XX^e siècle, si la résolution d'une équation aboutit à une solution négative, on conseille de réécrire le problème ainsi que nous l'avons vu dans le texte de De Morgan...

3 Problème particulier de la règle des signes pour le produit

Voici ce qu'écrivait l'écrivain français Stendhal, dans son roman autobiographique *La vie d'Henri Brulard*, en 1835, pour exprimer son désarroi face à la règle des signes :

« *Mon grand malheur était cette figure :*



Supposons que RP soit la ligne qui sépare le positif du négatif, tout ce qui est au-dessus est positif, comme négatif tout ce qui est au-dessous; comment, en prenant le carré B autant de fois qu'il y a d'unités dans le carré A, puis-je parvenir à faire changer de côté au carré C? Et, en suivant une comparaison gauche que l'accent souverainement traînard et grenoblois de M. Chabert rendait encore plus gauche, supposons que les quantités négatives sont les dettes d'un homme, comment en multipliant 10 000 francs de dette par 500 francs, cet homme aura-t-il ou parviendra-t-il à avoir une fortune de 5 000 000, cinq millions de francs ? »

Il y a une sorte de nécessité à accepter que « négatif fois négatif = positif », si l'on veut que l'ensemble des calculs sur tous les nombres soit cohérent. En fait, il s'agit, ainsi que nous l'avons remarqué, plus d'une opération sur les signes que sur les nombres, puisqu'un « nombre » négatif, est un nombre positif précédé du signe moins. Quoi qu'il en soit, cette nécessité, manipulée formellement sans problème, heurte le bon sens, même si quelques mathématiciens, parmi les plus grands, essaient de donner des justifications, souvent bancales. Jusqu'à un certain point, le problème de la justification n'est peut-être pas majeur, dans la mesure où tout marche bien,

où l'on n'aboutit pas à des contradictions. Il faut arriver à un certain niveau de réflexion épistémologique, ou se heurter à des cas où les propriétés ne marchent pas pour avoir un besoin de fondements inattaquables.

Des explications.

- Celle de Stevin (1585) :

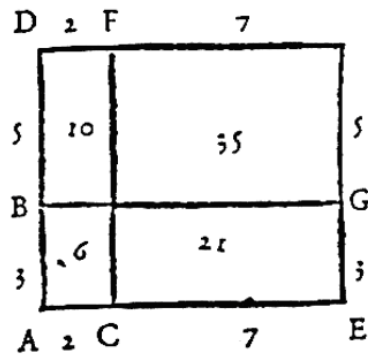
Plus multiplié par plus, donne produit plus, & moins multiplié par moins, donne produit plus, & plus multiplié par moins, ou moins multiplié par plus, donne produit moins.

Explication du donné. Soit 8—5 multiplié par 9—7, en ceste sorte : — 7 fois — 5 font + 35 (+ 35, par ce que, comme dict le theoreme, — par —, fait +) Puis — 7 fois 8 fait — 56 (— 56, par ce que, comme dict est au theoreme, — par +, fait —) Et semblablement soit 8—5, multiplié par le 9, & donneront produits 72—45; Puis ajoutez + 72 + 35, font 107. Puis ajoutez les — 56 — 45, font — 101; Et soustraiét le 101 de 107 reste 6, pour produit de telle multiplication. De laquelle la disposition des caracteres de l'operation est telle:

Explication du requis. Il faut de-

$$\begin{array}{r} 8-5 \\ 9-7 \\ \hline -56 \quad 35 \\ 72-45 \\ \hline 6 \end{array}$$
monstrer par ledict donné, que + multiplié par +, fait +, & que — par —, fait +, & que + par —, ou — par +, fait —. *Demonstration.* Le nombre à multiplier 8—5, vaut 3, & le multiplicateur 9—7 vaut 2; Mais multipliant 2 par 3, le produit est 6; Doncques le produit cy dessus aussi 6, est le vray produit : Mais la mesme est trouvé par multiplication, là ou nous avons dict que + multiplié par +, donne produit +, & — par — donne produit +, & + par —, ou — par +, donne produit —, doncques le theoreme est veritable.

Autre demonstration geometrique.



Soit AB 8—5 (à sçavoir AD 8—DB 5) Puis AC 9—7 (à sçavoir AE 9—E C 7) leur produit sera CB: ou bien selon la multiplication precedante ED 72 — EF 56 — DG 45 + GF 35, Lesquel-

les nous demonstresons estre egales à CB en ceste sorte. De tout le ED + GF, soustraiét EF, & DG, reste CB. *Conclusion.* Plus doncques multiplié par plus, donne produit plus. & moins multiplié par moins, donne produit plus, & plus multiplié par moins, ou moins multiplié par plus, donne produit moins; ce qu'il falloit demonstres.

Il s'agit en fait de comparer les aires des rectangles en les prenant globalement, puis en ajoutant les différentes petites parties, et d'arriver en quelque sorte en développant $(a - b)(c - d)$ où a, b, c, d sont des réels positifs à la nécessité d'écrire que $(-b) \times (-d) = bd$.

- Celle de Maclaurin (1748), en avance sur son temps car formelle :

« On pourrait de là déduire la règle des signes telle qu'on a coutume de l'énoncer, qui est que les signes semblables dans les termes du multiplicateur et du multiplicande donnent + au produit, et les signes différents donnent -. Nous avons évité cette manière de présenter la règle, pour épargner aux commençants l'expression révoltante - par - donne +, qui est cependant une conséquence nécessaire de la règle : on peut, comme nous avons fait, la déguiser, mais non la contredire ou l'anéantir ; le lecteur, sans s'en apercevoir, en a observé tout le sens dans les exemples précédents ; familiarisé avec la chose, pourrait-il encore s'effaroucher des mots ? S'il lui reste là-dessus quelque scrupule, qu'il fasse attention à la démonstration suivante qui attaque directement la difficulté.

+a - a = 0, ainsi par quelque quantité qu'on multiplie +a - a, le produit doit être 0 : si je le multiplie par n, j'aurai pour le premier terme +na, donc j'aurai pour le second -na, puisqu'il faut que les deux termes se détruisent. Donc les signes différents donnent - au produit ? Si je multiplie +a - a par -n, par le cas précédent, j'aurai -na pour le premier terme ; donc j'aurai +na pour le second, puisqu'il faut toujours que les deux termes se détruisent : donc - multiplié par - donne + au produit. »

- Celle d'Euler (1774), peu convaincante :

« Il nous reste à résoudre encore ce cas où - est multiplié par - ou, par exemple -a par -b. Il est évident d'abord que quant aux lettres, le produit sera ab ; mais il est incertain encore si c'est le signe + ou bien le signe - qu'il faut mettre devant ce produit ; tout ce qu'on sait, c'est que ce sera l'un ou l'autre de ces signes. Or je dis que ce ne peut être le signe - ; car -a par +b donne -ab et -a par -b ne peut produire le même résultat que -a par +b ; mais il doit en résulter l'opposé, c'est-à-dire +ab ; par conséquent nous avons cette règle : + multiplié par + fait +, de même que - multiplié par - . »

Nous comprenons bien qu'il s'agit jusqu'ici réellement de **la règle des signes**, puisqu'il n'y a en fait que des quantités négatives, désignées par un nombre **positif**, et précédé du signe -. Il ne s'agit pas vraiment du produit de deux **nombre négatifs**.

- L'explication de Cauchy (1821) accentue cette considération définissant une règle opérant sur les symboles + et -, donc pas sur les nombres négatifs :

« D'après ces conventions, si l'on représente par A soit un nombre, soit une quantité quelconque, et que l'on fasse : a = +A, b = -A

On aura : +a = +A, +b = -A - a = -A, -b = +A

Si dans les quatre dernières équations l'on remet pour a et b leurs valeurs entre parenthèses, on obtiendra les formules

$$+(+A) = +A \quad +(-A) = -A \quad -(+A) = -A \quad -(-A) = +A$$

Dans chacune de ces formules le signe du second membre est ce qu'on appelle le produit des deux signes de premier. Multiplier deux signes l'un par l'autre c'est former leur produit.

L'inspection seule des équations suffit pour établir la règle des signes. »

Il y a une sorte de confusion entre le signe - qui signifie l'opposé et le nombre lui-même, qui peut être négatif. Et Cauchy s'appuie en fait sur le fait que l'opposé de l'opposé est le nombre lui-même. Il n'y a pas ici de considération sur le produit de nombres négatifs.

- Hankel (1867) aborde le problème dans une toute autre perspective, purement formelle.

Les règles de l'addition et de la multiplication doivent être les mêmes pour tous les réels positifs ou négatifs. Dans cette perspective les négatifs ont le statut de nombre, à part entière, et il distingue de façon nette le signe $-$ de l'opposé et le signe $-$ de la soustraction. Ce qui est important, c'est de pouvoir multiplier des opposés.

Son explication peut se résumer de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
 0 &= a \times 0 = a \times (b + \text{opp } b) = ab + a \times (\text{opp } b) \\
 &= 0 \times (\text{opp } b) = (a + \text{opp } a) \times (\text{opp } b) = a \times (\text{opp } b) + (\text{opp } a \times \text{opp } b) \\
 \text{donc } (\text{opp } a) \times (\text{opp } b) &= ab.
 \end{aligned}$$

D'autres propositions ont été faites au début du XIX^e siècle par Wessel, Argand, ..., donnant une interprétation géométrique des nombres complexes, incluant les négatifs. Tous ces mathématiciens étaient très peu connus, et leurs propositions ne seront prises au sérieux que lorsque les « grands », comme Gauss ou Cauchy, les reprendront à leur propre compte.

En fait, le bouleversement apporté par Hankel s'inscrit dans la rupture idéologique de la pensée mathématique de la fin du XIX^e siècle à propos des relations entre les mathématiques et la réalité physique. Jusque là, si l'on inventait de nouveaux « nombres » qui choquaient les idées reçues, ils étaient automatiquement qualifiés d'*incompréhensibles*, *inconcevables*, *absurdes*, *sourds*, *irrationnels*, *faux*, *imaginaires*.

Hankel rejette cette idéologie. Il accepte que $(-3)^2 > (2)^2$, car ce résultat est cohérent avec la déduction formelle, et il ne se soucie pas de ce que cela peut avoir de choquant pour les idées reçues. Il n'y a pas de bon modèle pour les négatifs, et Hankel refuse cette quête. Le pas très important qu'il est possible de franchir à l'époque de Hankel, et qui ne l'était sans doute pas à l'époque de Maclaurin, est de pouvoir considérer les nombres non pas liés à une réalité physique, mais comme des êtres mathématiques qui ont certaines relations entre eux.

« Le nombre n'est plus aujourd'hui une chose, une substance qui existerait en toute indépendance en dehors du sujet pensant ou des objets qui en sont l'occasion ; ce n'est plus un principe indépendant comme l'ont cru les pythagoriciens. La question de l'existence des nombres nous renvoie soit au sujet pensant, soit aux objets pensés dont les nombres présentent des relations. Le mathématicien tient pour impossible au sens strict cela seul qui est logiquement impossible, c'est-à-dire qui implique une contradiction. Il n'est pas besoin de démontrer qu'on peut admettre des nombres impossibles en ce sens. Mais si les nombres considérés sont logiquement possibles, si leur concept est défini clairement et distinctement, s'il est donc libre de toute contradiction, la question ne peut plus être de savoir s'il y a dans le domaine du réel, dans ce qui est intuitif ou actuellement donné, un substrat pour ce nombre, s'il existe des objets qui puissent donner matière aux nombres en tant qu'ils sont relations intellectuelles d'un certain type. »

Hankel, *Théorie du système des nombres complexes*, 1867

- Hamilton, en 1835, dans son ouvrage *Theory of conjugate functions ; on algebra as the science of pure time*, soulignera cette difficulté que pour comprendre les nombres et particulièrement une propriété comme la règle sur le signe d'un produit, il faut rester dans le domaine purement formel, et se soustraire à toute référence du monde physique. Au contraire, insiste-t-il, dans le domaine de la géométrie, c'est cette référence au monde physique qui permet d'admettre, sans discussion, par exemple le cinquième postulat d'Euclide sur les parallèles : pour lui, le postulat des parallèles est admis par tous sans discussion, parce qu'il peut se « vérifier »

physiquement tous les jours ; la règle des signes, au contraire, heurte le bon sens donc demande une justification solide.

Remarquons que Hamilton, l'inventeur des quaternions, construisait, à l'époque où il écrivait ce qui précède, une théorie des couples qui permettait une sorte de justification algébrique de tous les « nombres » et qu'il serait conduit à abandonner, pour les quaternions justement, une propriété qui semblait liée à la notion même de nombre, à savoir la commutativité du produit. Soulignons aussi qu'à cette même époque, se mettaient en place des géométries non euclidiennes battant en brèche le postulat des parallèles.

Notons enfin que Hankel est de ceux qui travailleront sur les idées de Grassmann, qui contribua largement à la construction des vecteurs et espaces vectoriels, sur un mode assez différent de Hamilton.

Ces nouvelles considérations sur les nombres firent leur chemin très lentement, et, au début du XX^e siècle, persiste toujours une méfiance et une certaine difficulté à expliquer les nombres négatifs, dans les manuels scolaires en particulier.

Conclusion en forme de réflexion pédagogique

Actuellement, il n'est pas si facile d'enseigner les nombres négatifs. Le modèle concret, sous la forme « gain-dette » par exemple, est une aide pédagogique, d'une certaine façon, mais il n'est pas toujours possible, et il peut même devenir un obstacle.

Cette histoire montre à loisir qu'il est possible d'acquérir une certaine facilité, voire une virtuosité opératoire, formellement, sans avoir de compréhension de ce qu'on manipule. Lorsque les interrogations viennent, l'obstacle alors se crée. Retenons les réflexions de Carnot, qui posait des problèmes fondamentaux : il n'est pas possible que $\frac{-1}{1} = \frac{1}{-1}$ ou que $(-3)^2 > 2^2$, sauf si l'on abandonne quelques règles établies ; dans ce cas, les « négatifs » ne seraient pas des « nombres » comme les positifs. Pour les admettre, il faut acquérir une autre idée du nombre, ou, au moins, changer de point de vue.

A la fin de cette promenade au pays des nombres, il faudra peut-être aussi se convaincre que les mathématiques se situent dans le domaine du théorique ou de l'abstrait. La difficulté réside, en fait, dans les relations entre la réalité physique et sa modélisation mathématique.

Reste cependant la question de donner non seulement du sens aux notions enseignées, mais de montrer la nécessité de l'invention pour la construction des mathématiques elles-mêmes, ou pour la compréhension, l'interprétation, la modélisation d'un problème de la réalité physique. Il est alors probable qu'il faudra tour à tour s'appuyer sur un modèle style « gain-dette », aller dans un sens, puis dans l'autre, et l'immersion dans l'abstraction mathématique, qui n'est pas forcément le passage le plus difficile, comme nous l'avons souligné.

L'Histoire nous enseigne ici les obstacles épistémologiques nés d'une certaine idée du nombre « mesure de grandeurs ». Peut-on les éviter pour accéder à la notion de nombre ?

Quelques références bibliographiques, éventuellement commentées

Parmi les ouvrages cités :

Ces titres sont donnés en référence, mais leur lecture demande souvent une formation déjà avancée en histoire des mathématiques et ce n'est évidemment pas un passage obligé avant de se lancer avec ses élèves. Certains de ces textes sont cependant très abordables, voire délectables. Le commentaire le signalera.

Il est souvent difficile de se procurer des textes anciens, particulièrement lorsqu'on est éloigné d'une ville universitaire pourvue d'une bonne médiathèque. Cependant de plus en plus d'ouvrages sont maintenant numérisés et téléchargeables sur des sites comme celui de la BNF (Gallica), Google-books, Numdam, Europeana, ... le plus simple étant souvent d'explorer les possibilités avec un moteur de recherche. Je signale en commentaire les textes auxquels j'ai déjà pu accéder en ligne.

Bien sûr, ceci ne vaut que pour les livres qui ne sont plus soumis à droits d'auteurs. Pour les autres, il est possible parfois de les faire acquérir par son CDI !

ARGAND, Jean-Robert, *Essai sur une manière de représenter des quantités imaginaires dans les constructions géométriques*, Paris, 1806.

Ce texte a été repris en 1813, dans les *Annales de mathématiques pures et appliquées*, dites « de Gergonne ». On peut accéder à ce texte en ligne. On trouve de nombreux commentaires et utilisations de ce texte pour l'enseignement des mathématiques, mais plutôt dans le cadre des nombres imaginaires (complexes).

CARDAN, Jérôme (Gerolamo Cardano), *Ars Magna*, 1545.

On peut accéder au texte en ligne, en latin, ou bien dans une traduction anglaise : *Ars magna or the rule of algebra*, Dover public., 1993.

CARNOT, Lazare, *Géométrie de position*, Duprat, Paris, an XI (1803).

Ouvrage difficile à lire pour des débutants en histoire des mathématiques.

On peut y accéder en ligne.

CLAIRAUT, Alexis-Claude, *Eléments d'algèbre*, Paris, 1746.

Reproduit par l'IREM Paris VII. (On peut aussi y accéder en ligne.)

Lecture intéressante, même pour des débutants en histoire des mathématiques.

DE MORGAN, Augustus, *On the foundation of algebra*, Transaction of the Cambridge Philosophical Society, 1861-1844-1847.

En anglais et difficile.

D'ALEMBERT, Jean Le Rond, article « Négatif », *Encyclopédie ou Dictionnaire raisonné des sciences, arts et métiers*, Paris, 1751-1765.

DESCARTES, René, *La Géométrie*, 1637.

Texte relativement difficile d'accès pour des débutants en histoire des mathématiques, mais certains extraits commentés se trouvent dans de nombreuses publications, IREM par exemple, et fournissent un matériau de réflexion essentiel pour un enseignant. De nombreuses éditions existent. Certaines sont en ligne.

EULER, Leonhard, *Eléments d'algèbre*, Paris, 1774.

HAMILTON, William Rowan, *Theory of conjugate functions, on algebraic couples with a preliminary and elementary essay on algebra as the science of pure time*, 1835.

Les textes de Hamilton (en anglais) sont accessibles en ligne, pour la plupart.

HANKEL, Hermann, *Theorie der complexen Zahlensysteme*, Leipzig, 1867.

Texte difficile et non traduit en français. Voir ci-dessous la référence « Jean-Claude Pont ».

MACLAURIN, Colin, *A treatise of algebra*, 1748

Traduction française *Traité d'Algèbre et de la manière de l'appliquer* accessible en ligne.

MASERES, Francis, *A dissertation on the use of the negative sign in Algebra*, Londres, 1758.

MONTUCLA, Jean-Etienne, *Histoire des mathématiques*, 1^{ère} édition 1758, 2^{ème} édition, 1799-1802, en 4 tomes. Réédité par J. Gabay, 2007.

Ouvrage passionnant, qui retrace l'histoire des mathématiques « pures et abstraites », des « mathématiques mixtes ou physico-mathématiques », et de l'astronomie, des origines jusqu'à la fin du XVIII^e siècle. Le titre complet est *Histoire des mathématiques, dans laquelle on rend compte de leurs progrès depuis les origines jusqu'à nos jours ; où l'on expose le tableau et le développement des principales découvertes dans toutes les parties des mathématiques, les contestations qui se sont élevées entre les mathématiciens, et les principaux traits de la vie des plus célèbres*. Peut se trouver dans les « bonnes » bibliothèques, IREM par exemple.

STENDHAL, *Vie de Henry Brulard*, 1835, Gallimard, Paris, 1973.

Un roman autobiographique, à mettre en toutes les mains.

WALLIS, John, *Treatise of algebra*, 1685.

D'autres ouvrages ou articles, pour approfondir la réflexion pédagogique :

BOYÉ, Anne, et alii, *Promenades historiques. Deuxième promenade : les moins que rien et les imaginaires mènent au réel*, IREM des Pays de la Loire, 1998.

DANTZIG, Tobias, *Number : the language of science*, 1^{ère} éd. 1930.

Il existe une traduction française, *Le nombre : langage de la science*, Blanchard, 1974.

Une réflexion intéressante sur les rapports entre mathématiques et réalité, et sur l'évolution du concept de nombre.

GAUD, Dominique, GUICHARD, Jean-Paul, « Aperçu historique sur les nombres relatifs », in *Repères IREM*, n° 2, 1991.

MARTINEZ, Alberto A., *Negative math ; how mathematical rules can be positively bent*, Princeton University Press, 2006.

Pour ceux et celles qui lisent l'anglais, réflexion didactique sur les négatifs, avec une perspective historique. Où l'on constate que bien évidemment ces problèmes ne sont pas franco-français.

MAZUR, Barry, *Ces nombres qui n'existent pas*, collection Quai des sciences, Dunod, 2004.

MOUREY, C. V., *La vraie théorie des quantités négatives et des quantités prétendues imaginaires dédiée aux amis de l'évidence*, 1828, réédité par l'IREM de Dijon, 1992.

A rapprocher du texte d'Argand. Le début de « la vraie théorie » est une réflexion sur les quantités négatives.

PONT, Jean-Claude, « Le nombre et son statut vers le milieu du XIX^e siècle, à la lumière de quelques traités », in *La Pensée numérique*, actes du colloque de Peyresq, 1999.

À rapprocher de la référence Hankel, car on trouve dans ce texte une analyse intéressante de la pensée de Hankel sur le nombre. Ce texte est téléchargeable.