Baccalauréat ES Nouvelle-Calédonie novembre 1998

EXERCICE 1 **4 points**
Commun à tous les candidats

Au cours d'une kermesse, l'animateur d'un stand dispose, dans un enclos, de douze cages peintes : sept sont blanches, deux noires et les trois autres vertes. L'animateur place alors une souris dans l'enclos. On suppose qu'à chaque jeu, la souris choisit d'entrer au hasard dans une cage et que tous les choix sont équiprobables.
Un joueur participe au jeu. Le règlement du jeu est le suivant :

— si la souris entre dans une cage blanche, le joueur perd ;
— si la souris entre dans une cage noire, le joueur gagne ;
— si la souris entre dans une cage verte, l'animateur remet la souris dans l'enclos ; si la souris entre alors dans une cage noire, le joueur gagne, sinon il perd.

On suppose que le choix de la deuxième cage est indépendant du choix de la première.

1. Montrer que la probabilité de l'évènement « le joueur gagne » est $\dfrac{5}{24}$
2. Un joueur possède 10 F qu'il verse pour participer à une partie.
   S'il gagne, il reçoit k francs ;
   sinon, il ne reçoit rien.
   Soit X la variable aléatoire prenant pour valeur la somme que possède le joueur après la partie.
   a. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
   b. Calculer, en fonction de k, l'espérance mathématique $\mathrm{E}(X)$ de la variable aléatoire X.
   c. Quelle valeur faut-il donner à k pour que le jeu soit équitable (c'est-à-dire pour que ce joueur puisse espérer posséder 10 F à la fin de la partie) ?

EXERCICE 2 **5 points**
Enseignement obligatoire

Une lessive est vendue habituellement, dans les magasins A et B, par barils de 5 kg, au prix de 65 F le baril.

1. On suppose que cette lessive est en promotion dans ces deux magasins :
   a. Dans le magasin A, on fait une réduction de 10 % sur le prix du baril. Dans le magasin B, on offre 10 % de produit gratuit en plus pour l'achat d'un baril.
   Déterminer dans lequel des deux magasins il est le plus avantageux d'acheter cette lessive.
   b. Répondre à la même question si, dans A, on fait une réduction de 20 % et, dans B, on offre 25 % de produit gratuit en plus.
2. On suppose maintenant que, dans le magasin A, on fait une réduction de x % du prix du baril et que, dans le magasin B, on offre y % de produit gratuit en plus pour l'achat d'un baril.
   a. Quelle relation doivent vérifier x et y pour que les promotions soient les mêmes dans les deux magasins ?
   Dans ces conditions, déterminer x lorsque $y = 25$.
   b. Dans cette question, $x = 10$. Quel pourcentage minimum, en nombre entier, de produit gratuit doit offrir le magasin B pour que sa promotion soit plus avantageuse que celle de A ?

EXERCICE 2 **5 points**

Enseignement de spécialité

Une observation faite sur la fréquentation d'un stade de football a permis de constater, pour chaque année, un taux de réabonnement de 80 %, ainsi que l'apparition de 4 000 nouveaux abonnés.
L'objet de cet exercice est l'étude du devenir du nombre annuel des abonnés, en supposant que la situation décrite par l'observation reste la même au fil des ans.
Les questions **2.** *et* **3.** *peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.*

On note a_n le nombre des abonnés à la fin de la n^{e} année et on précise que $a_0 = 7000$.

1. Expliquer pourquoi, pour tout nombre entier naturel n, on a $a_{n+1} = 0,8a_n + 4000$.
2. L'objet de cette question est l'étude graphique de la suite (a_n).
   On considère un repère orthonormal (unité graphique : 0,5 cm représente 1 000 abonnés).
   a. Tracer dans ce repère la droite (D) d'équation $y = 0,8x + 4000$ et la droite (Δ) d'équation $y = x$, pour les abscisses comprises entre 0 et 25 000.
   b. Placer a_0 sur l'axe des abscisses. Utiliser les droites précédentes pour placer sur l'axe des abscisses les valeurs a_1, a_2 et a_3.
   c. Si l'on poursuit le processus graphique précédent, quelle limite peut-on présumer pour la suite (a_n) ?
3. L'objet de cette question est l'étude numérique de la suite (a_n).
   Soit (u_n) la suite définie, pour tout nombre entier naturel n, par $u_n = 20000 - a_n$.
   a. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique, dont on précisera la raison et le premier terme.
   b. Soit n un nombre entier naturel; exprimer u_n en fonction de n. En déduire que, pour tout nombre entier naturel n, on a $a_n = 20000 - 13000 \times 0,8^n$.
   c. En utilisant le résultat précédent, déterminer la limite de la suite (a_n).
   d. Après combien d'années le nombre d'abonnés dépassera-t-il 16 000 ?

PROBLÈME **11 points**

Les objectifs de ce problème sont, en s'appuyant sur une fonction auxiliaire (partie A), l'étude d'une fonction f, le tracé de sa représentation graphique et le calcul d'une aire associé (partie B).

Partie A

★ Étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction numérique définie pour tout x appartenant à l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par

$$g(x) = x^2 - 2 + \ln x.$$

1. Étudier le sens de variations de g (on ne demande pas d'étudier les limites de g en 0 et en $+\infty$).
2. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ a une solution unique, notée α appartenant à l'intervalle $[1~;~2]$.
   Expliquer pourquoi α est la seule solution de l'équation $g(x) = 0$, pour x appartenant à $]0~;~+\infty[$.
   Donner un encadrement de α, d'amplitude 10^{-2}.
3. Étudier le signe de $g(x)$ en fonction de x.

Partie B

★ Étude d'une fonction f et calcul d'une aire

On considère la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = x + \frac{1 - \ln x}{x}$$

et on note f' sa dérivée.

Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ (unité graphique : 2 cm).

1. Étudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
2. Calculer $f'(x)$ et vérifier que pour tout x appartenant à $]0\,;\,+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.
   En déduire le sens de variations de f.
3. **a.** Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x$ est asymptote à $\mathscr{C}$.
   b. Déterminer le point d'intersection I de $\mathscr{C}$ et (Δ) et étudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à (Δ).
4. Tracer la droite (Δ) et la courbe $\mathscr{C}$.
5. Calculer la valeur exacte de l'aire, en cm^2, de la partie comprise sur le graphique entre $\mathscr{C}$, (Δ) et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = \text{e}$.
   $\left(\text{On pourra remarquer que } \dfrac{\ln x}{x} = \dfrac{1}{x} \times \ln x\right)$.