Baccalauréat Nouvelle-Calédonie février 1968

SÉRIE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

Exercice 1

Étudier les variations de la fonction

$$y = \cos^2 2x - 2\sin 2x + 2.$$

Construire le graphique de cette fonction par rapport à un système d'axes orthonormé, $x'\mathrm{O}x$, $y'\mathrm{O}y$.

Exercice 2

Calculer la partie réelle et la partie imaginaire du nombre complexe

$$Z = \frac{z^2 + z + 1}{z^4 - 1}.$$

pour la valeur $z = 2 + 3\mathrm{i}$.

Exercice 3

Le plan est rapporté à un système d'axes orthonormé, $x'\mathrm{O}x$ et $y'\mathrm{O}y$. On considère le point fixe A, de coordonnées $(x = a, y = 0)$ et l'on note $\mathcal{T}_{\mathrm{A}}$ la transformation définie comme suit :
M étant un point quelconque du plan, de coordonnées $(x\ ;\ y)$, on lui fait correspondre, lorsque cela est possible, le point M$'$ de coordonnées $\left(x'\ ;\ y'\right)$, tel que M$'$ soit le conjugué harmonique de M par rapport aux points A et A$'$, A$'$ étant le point d'intersection de la droite (AM) avec l'axe $y'\mathrm{O}y$ (on suppose $a \neq 0$).

1. Déterminer les coordonnées du point A$'$ en fonction de x, y et a.
   Montrer que les cordonées du point M$'$ sont données par les formules :

   $$x' = \frac{ax}{2x - a} \quad \text{et} \quad y' = \frac{ay}{a - 2x}.$$

   Calculer les coordonnées de M en fonction de x', y' et a ;comparer avec les formules précédentes ; pouvait-on prévoir le resultat ?
   Determmer les points doubles de la transformation $\mathcal{T}_{\mathrm{A}}$.
2. M décrivant la droite (D) d'équation

   $$ux + vy + w = 0,$$

   former l'équation du lieu, (D$'$), des points M$'$ correspondants ; que peut-on dire, en général, de l'intersection de (D) et (D$'$) ?
   Effectuer une étude purement géométrique et signaler les cas particuliers pouvant se présenter.
3. M décrivant le cercle de diamètre OA, former l'équation du lieu, (H), des points M$'$ correspondants ; préciser la nature géométrique de la courbe (H).

4. M$'$ étant le transformé d'un point M dans la transformation $\mathcal{T}_{\text{A}}$ précédemment définie, soit B un point fixe de l'axe $x'\text{O}x$ d'abscisse b (on suppose $b \neq 0$ et $b \neq a$). On désigne par P le conjugué harmonique de M$'$ par rapport aux points B et B$'$, B$'$ étant le point d'intersection de la droite BM$'$ avec l'axe $y'\text{O}y$; P est donc le transformé de M$'$ dans la transformation notée $\mathcal{T}_{\text{B}}$.

Calculer les coordonnées $(X\ ;\ Y)$ du point P en fonction de celles $(x\ ;\ y)$ du point M.

En déduire que les points M et P sont alignés avec l'origine, O.

Retrouver géométriquement ce résultat.

Soit $\sum$ la transformation qui, au point M, associe le point P. Exprimer la transformation $\sum$ en fonction des transformations $\mathcal{T}_{\text{A}}$ et $\mathcal{T}_{\text{B}}$.

Soit P$'$ le symétrique du point P par rapport à l'axe $y'\text{O}y$. Montrer qu'il existe un point G de l'axe $x'\text{O}x$ tel que la transformation qui, au point M, associe le point P$'$ soit précisément la transformation notée $\mathcal{T}_{\text{C}}$, définie à partir du point C comme le sont $\mathcal{T}_{\text{A}}$ et $\mathcal{T}_{\text{B}}$ à partir des points A et B respectivement.

L'ensemble des transformations $\mathcal{T}_{\text{A}}$ obtenues en prenant pour point A toute position distincte de O sur l'axe $x'\text{O}x$ possède-t-il une structure de groupe pour la loi produit des transformations ?