Baccalauréat Nouvelle-Calédonie S novembre 2003

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

On observe sur une longue période le nombre d'accidents de scooters à un carrefour. Il est alors possible de proposer la modélisation suivante : pour n scooters franchissant le carrefour durant une année (n est un grand nombre inconnu), on admet que la variable aléatoire S_n qui totalise le nombre d'accidents de scooters à ce carrefour durant cette année suit une loi binomiale; on estime que l'espérance mathématique de S_n notée $\mathrm{E}(S_n)$ est égale à 10.

Soit p la probabilité pour un scooter d'être accidenté à ce carrefour pendant l'année considérée.

1. Calculer p, puis justifier l'égalité $\mathrm{P}(S_n = k) = \binom{n}{k}\left(\dfrac{10}{n}\right)^k\left(1-\dfrac{10}{n}\right)^{n-k}$ où k est un entier naturel tel que $0 \leqslant k \leqslant n$.
2. **a.** Établir l'égalité $\ln\left[\mathrm{P}(S_n = 0)\right] = -10 \times \dfrac{\ln\left(1-\frac{10}{n}\right)}{\frac{-10}{n}}$ où ln désigne la fonction logarithme népérien; en déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}(S_n = 0) = \mathrm{e}^{-10}$.

   b. Démontrer que $\mathrm{P}(S_n = k+1) = \mathrm{P}(S_n = k) \times \dfrac{n-k}{n-10} \times \dfrac{10}{k+1}$, où k est un entier naturel tel que $0 \leqslant k \leqslant n-1$.

   c. Démontrer que si $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}(S_n = k) = \mathrm{e}^{-10}\frac{10^k}{k!}$ pour $0 \leqslant k \leqslant n$, alors on a également $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}(S_n = k+1) = \mathrm{e}^{-10}\frac{10^{k+1}}{(k+1)!}$ pour $0 \leqslant k+1 \leqslant n$.

   d. Démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence sur l'entier naturel k que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}(S_n = k) = \mathrm{e}^{-10}\frac{10^k}{k!}$ où k est un entier naturel tel que $0 \leqslant k \leqslant n$.
3. On suppose que le nombre n est suffisamment grand pour que l'on puisse admettre que $\mathrm{e}^{-10}\dfrac{10^k}{k!}$ est une approximation acceptable de $\mathrm{P}(S_n = k)$. Utiliser cette approximation pour calculer à 10^{-4} près la probabilité pour qu'au cours de cette année il y ait au moins trois accidents de scooters à ce carrefour.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$; on considère les points A(3 ; 0 ; 10), B(0 ; 0 ; 15) et C(0 ; 20 ; 0).

1. **a.** Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB).

   b. Montrer que la droite (AB) coupe l'axe des abscisses au point E(9 ; 0 ; 0).

   c. Justifier que les points A, B et C ne sont pas alignés.
2. Soit H le pied de la hauteur issue de O dans le triangle OBC

   a. Justifier que la droite (BC) est perpendiculaire au plan (OEH). En déduire que (EH) est la hauteur issue de E dans le triangle EBC.

   b. Déterminer une équation cartésienne du plan (OEH).

c. Vérifier que le plan (ABC) admet pour équation cartésienne

$$20x + 9y + 12z - 180 = 0.$$

d. Montrer que le système $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 0 \\ 4y - 3z & = & 0 \\ 20x + 9y + 12z - 180 & = & 0 \end{array}\right.$ a une solution unique. Que représente cette solution ?

e. Calculer la distance OH, en déduire que EH = 15 et l'aire du triangle EBC.

3. En exprimant de deux façons le volume du tétraèdre OEBC, déterminer la distance du point O au plan (ABC). Pouvait-on prévoir le résultat à partir de l'équation obtenue en **2. c.** ?

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. **a.** Soit p un entier naturel. Montrer que l'un des trois nombres p, $p+10$ et $p+20$, et l'un seulement est divisible par 3.

b. Les entiers naturels a, b et c sont dans cet ordre les trois premiers terme d'une suite arithmétique de raison 10. Déterminer ces trois nombres sachant qu'ils sont premiers.

2. Soit E l'ensemble des triplets d'entiers relatifs $(u\ ;\ v\ ;\ w)$ tels que

$$3u + 13v + 23w = 0.$$

a. Montrer que pour un tel triplet $v \equiv w \pmod{3}$

b. On pose $v = 3k + r$ et $w = 3k' + r$ où k, k' et r sont des entiers relatifs et $0 \leqslant r \leqslant 2$.

Montrer que les éléments de E sont de la forme :

$$(-13k - 23k' - 12r\ ;\ 3k + r\ ;\ 3k' + r).$$

c. L'espace est rapporté à un repère orthonormal d'origine O et soit P le plan d'équation $3x + 13y + 23z = 0$.

Déterminer l'ensemble des points M à coordonnées $(x,\ y,\ z)$ entières relatives appartenant au plan P et situés à l'intérieur du cube de centre O, de côté 5 et dont les arêtes sont parallèles aux axes.

PROBLÈME **11 points**

Les trois parties sont dans une large mesure indépendantes.

Pour tout entier naturel n, on définit sur $\mathbb{R}$ la fonction numérique f_n par :

$$f_0(x) = \frac{1}{1+x^2} \text{ et pour } n \text{ entier naturel non nul } f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^2}.$$

On note Γ_n, la courbe représentative de f_n, dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, unité graphique : 4 cm.

On désigne par I_n l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(t)\,\text{d}t$.

Partie A

1. **a.** Étudier les limites de f_1 en $+\infty$ et en $-\infty$. Quelle est la conséquence graphique de ces résultats ?

b. Étudier les variations de f_1.

c. Tracer la courbe Γ_1.

d. Calculer I_1.

2. **a.** Étudier les limites de f_3 en $+\infty$.

b. Étudier les variations de f_3.

c. Tracer la courbe Γ_3 sur le même dessin qu'au **1. c.**.

3. Calculer $I_1 + I_3$. En déduire la valeur de I_3.

4. Calculer, en unités d'aire, l'aire du domaine limité par les courbes Γ_1, Γ_3 et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$.

Partie B

Pour cette partie, on dessinera la figure demandée dans un nouveau repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, unité graphique : 4 cm.

1. **a.** Étudier les limites de f_0 en $+\infty$ et en $-\infty$.

b. Étudier les variations de f_0.

2. Soit (a_n) la suite définie, pour n entier naturel non nul, par $a_n = \displaystyle\int_0^n \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

a. Interpréter graphiquement a_n.

b. Montrer que la suite (a_n) est croissante.

c. Montrer que pour tout réel t : $\dfrac{1}{1+t^2} \leqslant 1$ et en déduire que $a_1 \leqslant 1$.

d. Montrer que pour tout réel t non nul : $\dfrac{1}{1+t^2} \leqslant \dfrac{1}{t^2}$ et en déduire que pour tout entier naturel non nul, $\displaystyle\int_1^n \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant 1 - \frac{1}{n}$.

e. Montrer, en utilisant les questions précédentes, que pour tout entier naturel n non nul, $a_n \leqslant 2$. Que peut-on en déduire pour la convergence de la suite (a_n) ?

Partie C

Soit F la fonction telle que :

$$F(0) = 0,\ F \text{ dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et } F'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

1. On pose, pour tout x de $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$, $H(x) = F[\tan(x)]$.

a. Calculer $H(0)$.

b. Montrer que H est dérivable sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$ et calculer $H'(x)$.

c. En déduire que, pour tout x de $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$, $H(x) = x$.

d. Montrer que $F(1) = \dfrac{\pi}{4}$.

2. On pose, pour tout x réel positif ou nul, $k(x) = F\left(\dfrac{1}{x+1}\right) + F\left(\dfrac{x}{x+2}\right)$.

a. Montrer que la fonction k est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et déterminer $k'(x)$.

b. En déduire la valeur de $F\left(\dfrac{1}{2}\right) + F\left(\dfrac{1}{3}\right)$.