

❧ Baccalauréat Nouvelle-Calédonie S ❧

novembre 2003

EXERCICE 1

4 points

Commun à tous les candidats

On observe sur une longue période le nombre d'accidents de scooters à un carrefour. Il est alors possible de proposer la modélisation suivante : pour n scooters franchissant le carrefour durant une année (n est un grand nombre inconnu), on admet que la variable aléatoire S_n qui totalise le nombre d'accidents de scooters à ce carrefour durant cette année suit une loi binomiale; on estime que l'espérance mathématique de S_n notée $E(S_n)$ est égale à 10. Soit p la probabilité pour un scooter d'être accidenté à ce carrefour pendant l'année considérée.

1. Calculer p , puis justifier l'égalité $P(S_n = k) = \binom{n}{k} \left(\frac{10}{n}\right)^k \left(1 - \frac{10}{n}\right)^{n-k}$ où k est un entier naturel tel que $0 \leq k \leq n$.
2. a. Établir l'égalité $\ln[P(S_n = 0)] = -10 \times \frac{\ln\left(1 - \frac{10}{n}\right)}{\frac{-10}{n}}$ où $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien; en déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(S_n = 0) = e^{-10}$.
b. Démontrer que $P(S_n = k + 1) = P(S_n = k) \times \frac{n - k}{n - 10} \times \frac{10}{k + 1}$, où k est un entier naturel tel que $0 \leq k \leq n - 1$.
c. Démontrer que si $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(S_n = k) = e^{-10} \frac{10^k}{k!}$ pour $0 \leq k \leq n$, alors on a également $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(S_n = k + 1) = e^{-10} \frac{10^{k+1}}{(k + 1)!}$ pour $0 \leq k + 1 \leq n$.
d. Démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence sur l'entier naturel k que $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(S_n = k) = e^{-10} \frac{10^k}{k!}$ où k est un entier naturel tel que $0 \leq k \leq n$.
3. On suppose que le nombre n est suffisamment grand pour que l'on puisse admettre que $e^{-10} \frac{10^k}{k!}$ est une approximation acceptable de $P(S_n = k)$. Utiliser cette approximation pour calculer à 10^{-4} près la probabilité pour qu'au cours de cette année il y ait au moins trois accidents de scooters à ce carrefour.

EXERCICE 2

5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$; on considère les points $A(3; 0; 10)$, $B(0; 0; 15)$ et $C(0; 20; 0)$.

1. a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB).
b. Montrer que la droite (AB) coupe l'axe des abscisses au point $E(9; 0; 0)$.
c. Justifier que les points A, B et C ne sont pas alignés.
2. Soit H le pied de la hauteur issue de O dans le triangle OBC

- a. Justifier que la droite (BC) est perpendiculaire au plan (OEH). En déduire que (EH) est la hauteur issue de E dans le triangle EBC.
- b. Déterminer une équation cartésienne du plan (OEH).
- c. Vérifier que le plan (ABC) admet pour équation cartésienne

$$20x + 9y + 12z - 180 = 0.$$

- d. Montrer que le système $\begin{cases} x &= 0 \\ 4y - 3z &= 0 \\ 20x + 9y + 12z - 180 &= 0 \end{cases}$ a une solution unique.

Que représente cette solution ?

- e. Calculer la distance OH, en déduire que $EH = 15$ et l'aire du triangle EBC.
3. En exprimant de deux façons le volume du tétraèdre OEBC, déterminer la distance du point O au plan (ABC). Pouvait-on prévoir le résultat à partir de l'équation obtenue en 2. c. ?

EXERCICE 2

5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. a. Soit p un entier naturel. Montrer que l'un des trois nombres p , $p + 10$ et $p + 20$, et l'un seulement est divisible par 3.
- b. Les entiers naturels a , b et c sont dans cet ordre les trois premiers terme d'une suite arithmétique de raison 10. Déterminer ces trois nombres sachant qu'ils sont premiers.
2. Soit E l'ensemble des triplets d'entiers relatifs $(u ; v ; w)$ tels que

$$3u + 13v + 23w = 0.$$

- a. Montrer que pour un tel triplet $v \equiv w \pmod{3}$
- b. On pose $v = 3k + r$ et $w = 3k' + r$ où k , k' et r sont des entiers relatifs et $0 \leq r \leq 2$. Montrer que les éléments de E sont de la forme :

$$(-13k - 23k' - 12r ; 3k + r ; 3k' + r).$$

- c. L'espace est rapporté à un repère orthonormal d'origine O et soit P le plan d'équation $3x + 13y + 23z = 0$.
Déterminer l'ensemble des points M à coordonnées (x, y, z) entières relatives appartenant au plan P et situés à l'intérieur du cube de centre O, de côté 5 et dont les arêtes sont parallèles aux axes.

PROBLÈME

11 points

Les trois parties sont dans une large mesure indépendantes.

Pour tout entier naturel n , on définit sur $\mathbb{R}$ la fonction numérique f_n par :

$$f_0(x) = \frac{1}{1+x^2} \text{ et pour } n \text{ entier naturel non nul } f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^2}.$$

On note Γ_n , la courbe représentative de f_n , dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, unité graphique : 4 cm.

On désigne par I_n l'intégrale $I_n = \int_0^1 f_n(t) dt$.

Partie A

1.
 - a. Étudier les limites de f_1 en $+\infty$ et en $-\infty$. Quelle est la conséquence graphique de ces résultats?
 - b. Étudier les variations de f_1 .
 - c. Tracer la courbe Γ_1 .
 - d. Calculer I_1 .
2.
 - a. Étudier les limites de f_3 en $+\infty$.
 - b. Étudier les variations de f_3 .
 - c. Tracer la courbe Γ_3 sur le même dessin qu'au 1. c..
3. Calculer $I_1 + I_3$. En déduire la valeur de I_3 .
4. Calculer, en unités d'aire, l'aire du domaine limité par les courbes Γ_1 , Γ_3 et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$.

Partie B

Pour cette partie, on dessinera la figure demandée dans un nouveau repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, unité graphique : 4 cm.

1.
 - a. Étudier les limites de f_0 en $+\infty$ et en $-\infty$.
 - b. Étudier les variations de f_0 .
2. Soit (a_n) la suite définie, pour n entier naturel non nul, par $a_n = \int_0^n \frac{1}{1+t^2} dt$.
 - a. Interpréter graphiquement a_n .
 - b. Montrer que la suite (a_n) est croissante.
 - c. Montrer que pour tout réel t : $\frac{1}{1+t^2} \leq 1$ et en déduire que $a_1 \leq 1$.
 - d. Montrer que pour tout réel t non nul : $\frac{1}{1+t^2} \leq \frac{1}{t^2}$ et en déduire que pour tout entier naturel non nul, $\int_1^n \frac{1}{1+t^2} dt \leq 1 - \frac{1}{n}$.
 - e. Montrer, en utilisant les questions précédentes, que pour tout entier naturel n non nul, $a_n \leq 2$. Que peut-on en déduire pour la convergence de la suite (a_n) ?

Partie C

Soit F la fonction telle que :

$$F(0) = 0, F \text{ dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et } F'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

1. On pose, pour tout x de $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, $H(x) = F[\tan(x)]$.
 - a. Calculer $H(0)$.
 - b. Montrer que H est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ et calculer $H'(x)$.
 - c. En déduire que, pour tout x de $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, $H(x) = x$.
 - d. Montrer que $F(1) = \frac{\pi}{4}$.
2. On pose, pour tout x réel positif ou nul, $k(x) = F\left(\frac{1}{x+1}\right) + F\left(\frac{x}{x+2}\right)$.
 - a. Montrer que la fonction k est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et déterminer $k'(x)$.
 - b. En déduire la valeur de $F\left(\frac{1}{2}\right) + F\left(\frac{1}{3}\right)$.