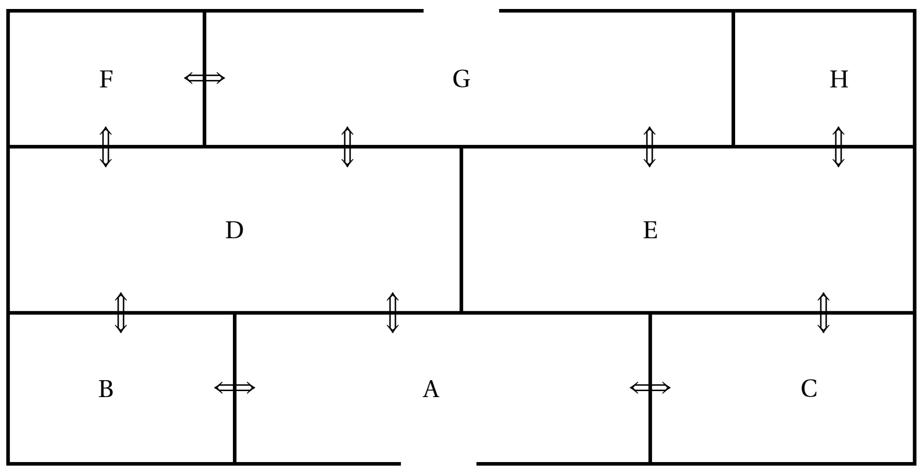
Baccalauréat ES Nouvelle-Calédonie novembre 2003

EXERCICE 1 **5 points**
Commun à tous les candidats

Jimmy s'entraîne à un jeu électronique.
Il arrive à l'entrée A d'un labyrinthe virtuel, schématisé par le dessin ci-dessous, où les doubles flèches représentent des portes s'ouvrant dans les deux sens :



Son parcours est régi par les règles suivantes :
• Il passe au hasard d'une salle à une autre, chaque porte possible étant équiprobable.
• Dès qu'il franchit une porte, elle se referme derrière lui, l'empêchant ainsi de la franchir à nouveau.
• La sortie est G. Il gagne la partie dès qu'il arrive en G.
• S'il franchit trois portes, l'entrée en A et la sortie en G non comprises, toutes les portes se ferment et la partie est terminée.

1. Jimmy décide de jouer une partie.
   a. Construire l'arbre pondéré des différents trajets possibles.
   b. Montrer que la probabilité du trajet ABDF est de $\frac{1}{9}$.
   c. Montrer que la probabilité que Jimmy gagne est de $\frac{1}{2}$.
2. Jimmy joue trois fois de suite. Les trois parties successives sont indépendantes.
   a. Calculer la probabilité qu'il gagne une partie et une seule.
   b. Calculer la probabilité qu'il gagne au moins une partie.

EXERCICE 2 **4 points**
Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

La courbe donnée ci-dessous représente une fonction F définie sur $]0\ ;\ +\infty[$. On note F' la fonction dérivée de F.

1. **a.** Par lecture graphique, donner les valeurs de : $F(1)$, $F'(1)$, $F(4)$.
   b. La tangente à la courbe au point $A(4\ ;4\ln 4-4)$ passe par le point $B(0\ ;\ -4)$.
   Déterminer par lecture graphique la valeur de son coefficient directeur. En déduire $F'(4)$.
   c. On note f la fonction dont F est une primitive. Donner la valeur de : $\displaystyle\int_1^4 f(x)\,dx$.

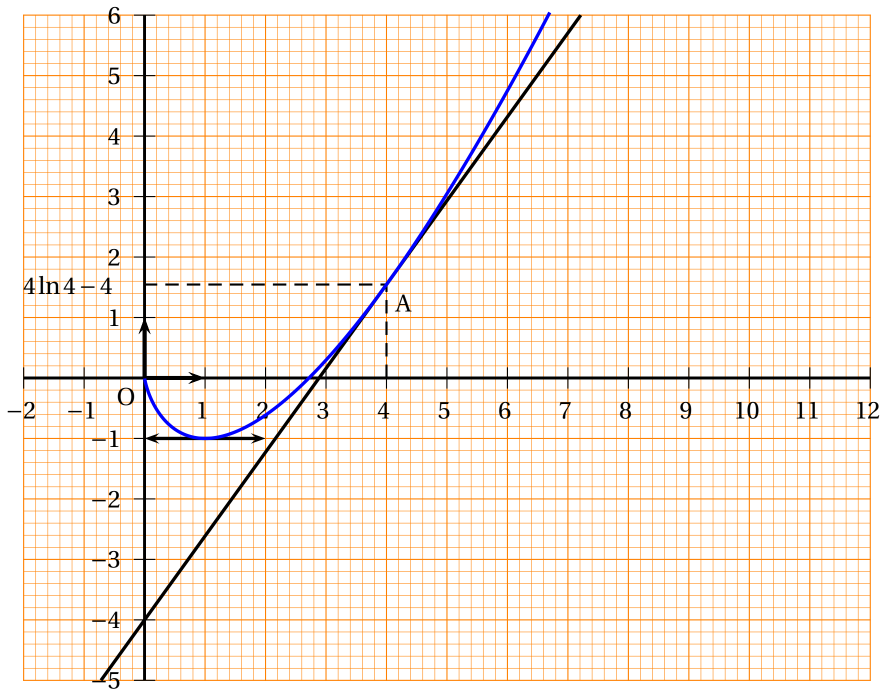
2. On donne : $F(x) = x\ln(x) - x$ pour $x > 0$. On appelle a le nombre strictement positif tel que $\displaystyle\int_1^a f(x)\,\mathrm{d}t = 1$.

a. Exprimer $F(a)$ en fonction de a.

b. Calculer la valeur exacte de a et une valeur approchée de a à 10^{-3} près.

c. Calculer l'expression de $F'(x)$ pour $x > 0$.

d. Calculer le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentant F au point d'abscisse a.



EXERCICE 2 **4 points**

Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

Un magasin de logiciels de jeux décide de lancer la commercialisation d'un nouveau produit.
Pour cela, il planifie sur trois ans ses objectifs trimestriels de prix de vente en se basant sur la loi de l'offre et de la demande.
n étant un entier naturel, on désigne par v_n l'indice du prix de vente lors du n-ième trimestre. L'indice de départ est noté v_0. On a : $v_0 = 100$ et $v_{n+1} = \dfrac{4}{5}v_n + 28$.

1. On pose : $u_n = v_n - 140$.

a. Montrer que (u_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{4}{5}$ de premier terme (-40).

b. Exprimer u_n en fonction de n, puis v_n en fonction de n.

2. On désigne par d_n l'indice de la demande lors du n-ième trimestre.

Sachant que : $d_n = \dfrac{750}{7} - \dfrac{5}{7}v_n$, calculer d_0 et exprimer d_n en fonction de n.

3. Calculer les valeurs des deux indices au bout des trois ans.

PROBLÈME **11 points**

Partie A : Fonction offre

Dans un magasin, pour le marché d'un produit audiovisuel, l'offre hebdomadaire, exprimée en dizaines d'articles de ce produit, est définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^{ax} - 1}{4}$$

où a est un nombre réel positif et où x représente le prix de vente unitaire de ce produit exprimé en centaines d'euros.

1. Sachant qu'un prix de vente unitaire de 400 € (qui se traduit par $x = 4$) correspond à une offre de 745 dizaines d'articles, déterminer la valeur exacte de a. Dans la suite du problème, on prendra : $a = 2$.
2. Étude de la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2x} - 1}{4}$.
   a. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
   b. Calculer l'expression de $f'(x)$, où f' désigne la dérivée de f en déduire le sens de variations de f sur $[0\,;\,+\infty[$.
   c. Tracer la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de f (unités graphiques : 5 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées)

Partie B : Fonction demande

Dans ce même magasin pour le même article la demande hebdomadaire, exprimée en dizaines d'articles, est donnée en fonction du prix unitaire x, exprimé en centaines d'euros par une fonction g définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{12}{\mathrm{e}^{2x} + 1}$$

1. Déterminer la limite de g en $+\infty$.
2. Calculer l'expression de $g'(x)$, où g' désigne la dérivée de g ; en déduire le sens de variations de g sur $[0\,;\,+\infty[$.
3. Tracer la courbe $\mathcal{C}_g$, représentative de g sur le même graphique que $\mathcal{C}_f$.

Partie C : Prix d'équilibre

On note $(p\,;\,q)$ les coordonnées du point d'intersection des deux courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

1. Par lecture graphique, donner un encadrement de p à 10^{-1} près.
2. Par le calcul, on résolvant l'équation $f(p) = g(p)$, vérifier que : $p = \dfrac{\ln 7}{2}$.
3. Calculer la valeur exacte de q.
4. Le nombre p correspond, selon la loi de l'offre et de la demande, au prix d'équilibre. Donner ce prix d'équilibre en euro au centime près par excès ainsi que le nombre d'articles offerts assurant l'équilibre du marché.

Partie D : Équilibre, offre et demande

On considère $\mathrm{R}_1 = pq - \displaystyle\int_0^p f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\mathrm{R}_2 = \displaystyle\int_0^p g(x)\,\mathrm{d}x - pq$.

1. Calculer la valeur exacte de R_1.
2. Soit la fonction G définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par : $G(x) = 6\left[2x - \ln\left(\mathrm{e}^{2x} + 1\right)\right]$.
   a. Vérifier que G est une primitive de g sur $[0\,;\,+\infty[$.
   b. Calculer R_2, et vérifier que 1,898 en est une valeur approchée.
3. Interpréter économiquement les quantités pq, R_1 et R_2.