Baccalauréat S Nouvelle Calédonie décembre 1997

EXERCICE 1 **4 POINTS**

Un artisan est contacté à domicile par ses clients sur appel téléphonique et dispose d'un répondeur.
Quand l'artisan est absent, il branche systématiquement son répondeur. Quand il est présent, il le branche une fois sur trois.
Quand un client téléphone, il a quatre chances sur cinq d'obtenir le répondeur et une chance sur cinq d'obtenir l'artisan.
On note $P(E)$ la probabilité d'un évènement E et $p(E/F)$ la probabilité conditionnelle de E sachant F.
Un client téléphone à l'artisan.
On note :

R l'évènement « le client obtient le répondeur » ;

A l'évènement « l'artisan est présent » ;

$\overline{A}$ l'évènement contraire de A ;

1. Déterminer la probabilité $P(R)$, ainsi que les probabilités conditionnelle $P(R/A)$ et $P\left(R/\overline{A}\right)$.
2. **a.** Exprimer $P(R)$ en fonction de $P(R/A)$, $P\left(R/\overline{A}\right)$ et $P(A)$.

   b. En déduire l'égalité $\dfrac{4}{5} = -\dfrac{2}{3}P(A) + 1$ et calculer la probabilité que l'artisan soit présent.
3. Un client téléphone ; il obtient le répondeur. Déterminer la probabilité que l'artisan soit présent.

EXERCICE 2 **5 POINTS**

1. On considère l'équation d'inconnue complexe z :

$$z^2 + 2z\sqrt{3} + 4 = 0.$$

   Résoudre cette équation dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.
   Écrire les solutions sous forme trigonométrique.
2. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}~;~\vec{u},~\vec{v}\right)$ (unité graphique : 2 cm).
   Les points I et J du plan ont pour affixes respectives : $z_{\mathrm{I}} = -\sqrt{3} + \mathrm{i}$ et $z_{\mathrm{J}} = -\sqrt{3} - \mathrm{i}$.

   a. Tracer le cercle de centre O et de rayon 2, et placer les points I et J sur la figure.

   b. Montrer que le point J est l'image du point I par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.

   c. En déduire la nature du triangle OIJ.
3. Soit B le milieu du segment [OI].

   a. Déterminer l'affixe du point B et placer le point B sur la figure.

   b. Préciser la nature du triangle JBO.
4. Soit A le point du plan défini par l'égalité vectorielle $\overrightarrow{\mathrm{BA}} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OJ}}$.

   a. Déterminer l'affixe du point A et placer le point A sur la figure.

   b. Vérifier que le point A est l'image du point B par la rotation de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{3}$.

   c. Montrer que le point A est le barycentre des points J, O, B affectés de coefficients que l'on déterminera.

EXERCICE 2 **5 POINTS**

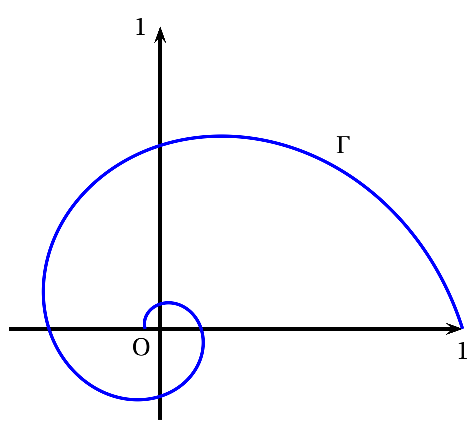
Enseignement de spécialité

Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$ (unité graphique : 15 cm).
Soit t un nombre réel positif. On note $M(t)$ le point de P de coordonnées $(x(t)\,;\,y(t))$ définies par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x(t) & = & \text{e}^{-\frac{t}{2}}\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) \\ y(t) & = & \text{e}^{-\frac{t}{2}}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right). \end{array}\right.$$

Quand t varie dans l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, le point $M(t)$ parcourt une courbe paramétrée notée Γ.
On a représenté sur la figure donnée, la partie de Γ correspondant aux valeurs de t appartenant à l'intervalle $[0\,;6]$.
Le but de l'exercice est d'étudier des propriétés géométriques de certains points de Γ.

1. **a.** Exprimer en fonction de t, l'affixe $z(t)$ du point $M(t)$.
   b. Préciser le module et un argument de $z(t)$.
2. Tracer les points $M(0)$, $M(1)$, $M(2)$, $M(3)$ et $M(4)$ sur la figure donnée en annexe.
   a. Pour tout nombre réel $t \geqslant 0$, exprimer $z(t+1)$ en fonction de $z(t)$.
   En déduire que $M(t+1)$ est l'image de $M(t)$ par la similitude directe de centre O, de rapport $\dfrac{1}{\sqrt{\text{e}}}$ et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$. On note s cette similitude.
   b. Pour tout nombre réel $t \geqslant 0$, exprimer $z(t+2)$ en fonction de $z(t)$.
   Justifier que $M(t+2)$ est l'image de $M(t)$ par une homothétie h dont on précisera les éléments caractéristiques.
3. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier chaque réponse.
   a. Les points $M(2)$ et $h(M(0))$ sont confondus.
   b. Les points $M(1)$ et $M(3)$ sont symétriques par rapport au point O.
   c. Les points $M(n)$, où n est un entier naturel, sont les points d'intersection de Γ avec les axes de coordonnées.



PROBLÈME **11 POINTS**

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{1+\text{e}^{x}} \text{ et } g(x) = \frac{1}{1+\text{e}^{-x}}$$

On note $\mathscr{C}$ et Γ les courbes représentatives des fonctions f et g dans un repère orthonormal $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ (unité graphique 4 cm).

A. Étude des fonctions f et g

1. **a.** Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.
   b. Calculer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$. Préciser les éventuelles asymptotes à $\mathcal{C}$.
   c. Prouver que le point Ω de coordonnées $\left(0\,;\,\dfrac{1}{2}\right)$ est centre de symétrie de $\mathcal{C}$.
   d. On note T la tangente à $\mathcal{C}$ au point Ω. Déterminer le coefficient directeur de T.
   e. Représenter T et $\mathcal{C}$.
2. **a.** En observant que, pour tout nombre réel x, on a $g(x) = f(-x)$, montrer que Γ est l'image de $\mathcal{C}$ par une symétrie que l'on déterminera.
   b. Vérifier que, pour tout nombre réel x, on a $f(x) + g(x) = 1$. En déduire que Γ est l'image de $\mathcal{C}$ par une autre symétrie que l'on déterminera.
   c. Déterminer le cœfficient directeur de la tangente T' à Γ au point Ω.
   d. Représenter T' et Γ sur la figure de la question 1.

B. Calcul d'une aire

On note $I = \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ et $J = \displaystyle\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t$.

1. En utilisant l'égalité de la question A. 2. b., calculer $I + J$.
2. **a.** Montrer que, pour tout nombre réel t, $\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-t}}$ peut s'écrire sous la forme $\dfrac{\mathrm{e}^{t}}{\mathrm{e}^{t}+1}$.
   b. En déduire une primitive G de g sur $\mathbb{R}$, puis la valeur de J.
3. Calculer la valeur de I.
4. **a.** Prouver que, pour tout nombre réel x appartenant à $[0\,;\,+\infty[$,
   $f(x) \leqslant g(x)$.
   b. On note Δ l'ensemble des points du plan dont les coordonnées $(x\,;\,y)$ vérifient

$$\left\{\begin{array}{rcl} 0 & \leqslant x \leqslant & 1, \\ f(x) & \leqslant y \leqslant & g(x) \end{array}\right.$$

   On note A l'aire, exprimée en cm^2, du domaine A. Exprimer A en fonction de I et J. Donner une approximation décimale de A à 10^{-2} près.

C. Étude d'une fonction définie par une intégrale

On considère les fonctions h et H définies sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$h(x) = \mathrm{e}^{x}\ln\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right) \text{ et } H(x) = \int_0^x h(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. **a.** Montrer que, pour tout nombre réel x appartenant à $[0, +\infty[$ $h(x)$ est strictement positif.
   b. En déduire que H est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.
2. On note h' la fonction dérivée de h.
   Vérifier que, pour tout nombre réel x appartenant à $[0\,;\,+\infty[$
   $h(x) = h'(x) + g(x)$.
   En déduire $H(x)$ en fonction de x.
3. **a.** Vérifier que, pour tout nombre réel x appartenant à $[0, +\infty[$,

$$h(x) = \frac{\ln\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right)}{\mathrm{e}^{-x}}.$$

   En déduire la limite de h en $+\infty$.
   b. Déterminer la limite de H en $+\infty$.
   Prouver finalement que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}[H(x) - x] = 1 - 2\ln 2$.
   Interpréter graphiquement ce dernier résultat.