∽ Baccalauréat ES Nouvelle-Calédonie novembre 2002 ∾

EXERCICE 1 **5 points**

Pierre se rend à une salle de jeux pour s'adonner à son jeu électronique favori.
Chaque partie de ce jeu est un duel entre Pierre et un adversaire virtuel choisi aléatoirement par la machine.
La machine choisit comme adversaire soit ATAR soit BLUT, avec la même probabilité $\frac{1}{2}$.
La probabilité pour que Pierre soit vainqueur contre ATAR est égale à $\frac{1}{4}$.
La probabilité pour que Pierre soit vainqueur contre BLUT est égale à $\frac{2}{5}$.
On appelle :
A l'évènement : « Pierre combat ATAR »,
B l'évènement : « Pierre combat BLUF »,
V l'évènement : « Pierre est vainqueur ».

1. **Pierre joue une partie.**
   - **a.** Calculer $p(A \cap V)$
   - **b.** Calculer $p(B \cap V)$.
   - **c.** En déduire que $p(V) = 0,325$.
2. **Étude de la dépense occasionnée si Pierre joue plusieurs parties.**
   Pierre paie un euro par partie, or il n'a que quatre euros en poche.
   Il joue une première fois. S'il est vainqueur, il arrête. Sinon il joue une deuxième fois. S'il est vainqueur, il arrête. Sinon il joue une troisième fois.
   S'il est vainqueur, il arrête. Sinon il joue une quatrième fois. Après cette éventuelle quatrième partie, il doit s'arrêter, quel qu'en soit le résultat.
   On suppose que les résultats de parties successives sont indépendants.
   - **a.** À l'aide d'un arbre pondéré, décrire toutes les situations possibles.
   - **b.** On appelle X la variable aléatoire égale à la dépense de Pierre, en euros.
     Recopier et compléter le tableau suivant donnant la loi de probabilité de X. Écrire les résultats avec trois décimales.

Dépense x_i	1	2	3	4
p$(X = x_i)$				

   - **c.** Calculer l'espérance mathématique de X que l'on donnera avec deux décimales.

EXERCICE 2 **4 points**
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité.

Le tableau suivant donne la population de l'an 2000 en millions d'habitants et le taux d'évolution annuel de cette population dans quelques pays européens.

Pays	France (sans les DOM-TOM)	Royaume-Uni	Russie
Taux d'évolution annuel en	0,4	0,2	−0,5
Population en 2000 (en millions)	56,6	59,8	147

Source : TEF

1. Soit U_n le nombre d'habitants prévu pour l'année $(2000 + n)$ dans un pays donné.
   On suppose que le taux d'évolution annuel est constant et on le note t %.
   - **a.** Calculer U_{n+1} en fonction de U_n et de t.

b. Préciser la raison de cette suite géométrique (U_n).

c. En déduire l'expression de U_n en fonction de t, n et U_0.

2. **Prévisions à partir des données du tableau :**

On suppose que les taux d'évolution annuels de chaque pays restent constants après l'an 2000 et on note F_n, B_n et R_n les populations, en millions d'habitants prévues pour l'année $(2000+n)$ respectivement en France, au Royaume-Uni et en Russie.

a. Calculer F_n, B_n et R_n en fonction de n .

b. Quelle sera la population de la France en 2010 ?

c. À partir de quelle année la population de la Russie sera-t-elle inférieure à 140 millions ?

3. **Comparaisons pays par pays.**

a. Justifier que $F_n \geqslant B_n$ si et seulement si $n \geqslant \dfrac{\ln(59,8) - \ln(56,6)}{\ln(1,004) - ln(1,002)}$.

b. En déduire l'année à partir de laquelle la population de la France dépassera celle du Royaume-Uni.

EXERCICE 2 **4 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité.

Une personne place, le 1$^{\text{er}}$ janvier 2001, sur un compte rémunéré à intérêts composés au taux annuel de 4 %, une somme de a euros.
De plus, chaque 1$^{\text{er}}$ janvier des années suivantes, c'est-à-dire au le 1$^{\text{er}}$ janvier 2002, 1$^{\text{er}}$ janvier 2003, . . . , etc, elle place sur ce compte la somme de 1 000 euros.
On pose $U_0 = a$. Plus généralement, pour tout entier naturel n, on appelle U_n la somme disponible sur le compte, le 1$^{\text{er}}$ janvier de l'année $(2001 + n)$.

1. **a.** Justifier que, pour tout entier naturel n, on a : $U_{n+1} = 1,04U_n + 1\,000$.

b. Montrer que cette suite n'est ni arithmétique, ni géométrique.

2. Optimisation du placement sur une durée de quatre ans.

On pose $V_n = U_n + 25\,000$.

a. Vérifier que la suite V_n est géométrique, de raison 1,04. Préciser son premier terme en fonction de a.

b. Exprimer V_n en fonction de a et n.

c. En déduire que, pour tout entier n : $U_n = 1,04^n \times (a + 25\,000) - 25\,000$.

3. Optimisation du placement sur une durée de quatre ans

Calculer à 0,01 euro près le placement initial minimal a permettant de disposer sur ce compte, le 1$^{\text{er}}$ janvier 2005, d'une somme d'au moins 15 000 euros.

PROBLÈME **11 points**

Partie A

Soit f la fonction définie, sur $\mathbb{R}$, par :

$$f(x) = \frac{10\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 4}.$$

On appelle $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ (unité graphique : 1 cm).

1. **a.** Déterminer la limite de f en $-\infty$.
   En écrivant $f(x) = 10 - \dfrac{40}{\text{e}^x + 4}$, déterminer la limite de f en $+\infty$.
   En déduire les équations des asymptotes à $(\mathscr{C})$.
   b. Calculer $f'(x)$, où f' est la dérivée de f.
   c. Étudier les variations de f.
   d. Dresser son tableau de variations.
2. Déterminer une équation de la tangente (D), à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse $\ln 4$.
3. Tracer sur un même graphique, la courbe $(\mathscr{C})$, ses asymptotes et la droite (D).

Partie B

Une entreprise fabrique un certain produit P. On appelle x le nombre de tonnes de P fabriquées.
On note $C(x)$ leur coût total de fabrication, exprimé en milliers d'euro.
La fonction coût marginal, C', est la dérivée de la fonction C.
Pour tout $x \in [0\ ;\ +\infty[$, on a : $C'(x) = f(x)$, où f est la fonction étudiée dans la **partie A**. De plus, on suppose qu'il n'y a pas de charges fixes, donc que $C(0) = 0$.

1. **a.** Montrer que le coût total est donné par :

$$C(x) = \int_0^x f(t)\,\text{d}t.$$

   b. Exprimer $C(x)$ en fonction de x.
   c. Quel est le coût total de 5 tonnes de ce produit P ? On en donnera la valeur exacte, puis la valeur arrondie à la dizaine d'euro près.
2. On appelle $C_M(x)$ le coût moyen défini, pour tout x strictement positif, par : $C_M(x) = \dfrac{C(x)}{x}$.
   a. Exprimer $C_M(x)$ en fonction de x.
   b. Vérifier que, pour tout $x > 0$, $C_M(x) = 10 + \dfrac{10\ln\left(1 + 4\text{e}^{-x}\right)}{x} - \dfrac{10\ln 5}{x}$.
   c. En déduire la limite de $C_M(x)$ en $+\infty$.