Baccalauréat L Nouvelle-Calédonie
Épreuve de spécialité - novembre 2005
Durée : 3 heures

EXERCICE 1 **8 points**

> **Rappels sur la fonction logarithme népérien, notée ln :**
> a et b étant des réels strictement positifs et n un entier naturel :
> $\ln(ab) = \ln a + \ln b$; $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$; $\ln(a^n) = n \ln a$.

Partie A :

Sur la **feuille annexe à rendre avec la copie** on a tracé dans un repère orthonormal la courbe $(\mathscr{C})$ représentant la fonction logarithme népérien et la parabole $(\mathscr{P})$ représentant la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2x^2 - 3x + \frac{9}{2}$$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.

1. **a.** Calculer $f'(x)$ pour tout réel x.

   b. En déduire le tableau de variation de la fonction f. (On ne demande pas les limites de f à l'infini.)

   c. Quelles sont les coordonnées exactes du point S sommet de la parabole $(\mathscr{P})$?

2. On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par :

$$g(x) = f(x) - \ln x = 2x^2 - 3x + \frac{9}{2} - \ln x.$$

   La fonction g est dérivable sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ et on note g' sa fonction dérivée.

   a. Montrer que, pour tout réel strictement positif x : $g'(x) = \dfrac{(4x+1)(x-1)}{x}$.

   b. Étudier les variations de la fonction g sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

   Justifier que le minimum de g est égal à $\dfrac{7}{2}$.

   c. En déduire que pour tout réel strictement positif x : $f(x) - \ln x > 0$.

   Quelle propriété des courbes $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{C})$, visible graphiquement, le résultat ci-dessus permet-il de justifier ?

Partie B :

Pour tout réel strictement positif x, on note M le point de la courbe $(\mathscr{P})$ d'abscisse x et N le point de la courbe $(\mathscr{C})$ de même abscisse x. On a ainsi : $MN = f(x) - \ln x = g(x)$. (la longueur MN est exprimée dans l'unité graphique du schéma de **feuille annexe**.)

1. Placer les points M et N sur le schéma de la **feuille annexe** lorsque $x = 2$.

2. Montrer que lorsque $x = \dfrac{3}{4}$ on a : $MN = \dfrac{27}{8} + 2\ln 2 - \ln 3$.

   Donner la valeur de MN arrondie au centième.

3. **a.** À l'aide de la **partie A**, déterminer pour quelle valeur de x, la longueur MN est minimale. Que vaut alors cette longueur ?

   b. Tracer en rouge sur le schéma de la **feuille annexe** le segment $[MN]$ correspondant.

4. Quelle est la limite de la longueur MN quand x tend vers 0 (avec $x > 0$) ?

EXERCICE 2 **6 points**

Rappels :
Soit (U_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme U_1.
On a alors pour tout entier n supérieur ou égal à 1 : $U_n = U_1 \times q^{n-1}$.
Soit (V_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme V_1.
On a alors pour tout entier n supérieur ou égal à 1 : $V_n = V_1 + (n-1)r$.

Un carré d'aire 1 m^2 est divisé en 9 carrés égaux comme indiqué sur la figure ci-contre.
On colorie le carré central. (1^er^ coloriage)

Les huit carrés restant sont à leur tour divisés en 9 carrés égaux comme indiqué sur la figure ci-contre.
On colorie les huit carrés centraux obtenus. (2^e^ coloriage)

On poursuit avec la même méthode la division et le coloriage du carré.

Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on désigne par A_n l'aire en m^2 de la surface totale coloriée après n coloriages. On a ainsi : $A_1 = \dfrac{1}{9}$.
La surface grisée sur le figure ci-dessus a donc pour aire A_2.
On remarquera que chaque étape du coloriage consiste à colorier un neuvième de la surface non coloriée jusque là.

1. a. Justifier que $A_2 = A_1 + \dfrac{1}{9}(1 - A_1)$ puis calculer la valeur numérique exacte de A_2.
   b. Expliquer pourquoi, pour tout entier n supérieur ou égal à 1,
   $A_{n+1} = \dfrac{8}{9}A_n + \dfrac{1}{9}$.
2. On pose pour tout entier n supérieur ou égal à 1 : $B_n = A_n - 1$.
   a. Calculer B_1.
   b. Montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 1, $B_{n+1} = \dfrac{8}{9}B_n$.
   c. Quelle est la nature de la suite (B_n) ?
   Exprimer alors, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, le terme général B_n de la suite (B_n) en fonction de n.
3. a. En déduire que pour tout entier n supérieur ou égal à 1 : $A_n = 1 - \left(\dfrac{8}{9}\right)^n$.
   b. Calculer alors la limite de la suite (A_n). Que peut-on en déduire ?

EXERCICE 3 **6 points**

Une horloge électronique a été programmée pour émettre un bip toutes les sept heures. Le premier bip est émis le 31 décembre 2004 à minuit.

1. **a.** À quelle heure est émis le dernier bip du 1^er^janvier 2005 ?
   b. À quelle heure est émis le premier bip du 2 janvier 2005 ?
   c. À quelle heure est émis le dernier bip du 2 janvier 2005 ?
   d. À quelle heure est émis le premier bip du 3 janvier 2005 ?
   Expliquer les réponses.
2. **a.** Montrer que : $24 \equiv 3 (\text{modulo} 7)$.
   b. En déduire le reste de la division euclidienne de 2×24 par 7 et le reste de la division euclidienne de 3×24 par 7. Justifier les réponses.
   Reproduire sur la copie et compléter le tableau suivant :

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Reste de la division euclidienne de $n \times 24$ par 7				5	1	4	0	3	6	2

   c. Expliquer pourquoi l'horloge émet un bip à minuit tous les 7 jours et tout les 7 jours seulement.
3. On rappelle que l'année 2005 est une année non bissextile et comporte donc 365 jours.
   a. Déterminer le plus petit entier naturel a tel que : $365 \equiv a (\text{modulo} 7)$
   b. À quelle date l'horloge émettra-t-elle un bip à minuit pour la dernière fois en 2005 ?
   Expliquer la réponse.