

EXERCICE 4

ÉNONCÉ

Dessinez un cube C (un dessin même approximatif en perspective suffira).

Soient A un de ses sommets et B le sommet opposé, c'est-à-dire que le milieu du segment $[AB]$ soit le centre du cube.

Considérons un autre cube C' admettant aussi (A, B) comme couple de sommets opposés.

Certaines arêtes de C rencontrent des arêtes de C' . Justifiez le fait que, en dehors de A et B , on obtient ainsi six points d'intersection entre une arête de C et une arête de C' .

Placez l'un d'eux sur le dessin et expliquez comment placer alors les cinq autres.

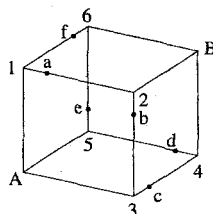
V étant le volume de C , quelle est la valeur minimale du volume de la portion d'espace commune aux cubes C et C' ?

SOLUTION

(D. Roux)

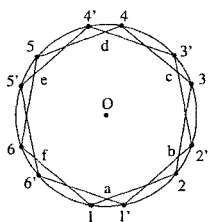
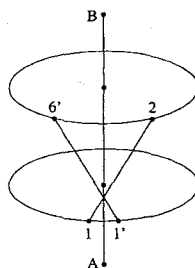
Désignons les 6 sommets du cube C autres que A et B par les numéros 1, 2, 3, 4, 5, 6.

De même, notons les 6 sommets du cube C' (qui est égal en dimensions au cube C) autres que A et B par $1', 2', 3', 4', 5', 6'$.



Les points 1, 3, 5, $1', 3', 5'$ appartiennent à un cercle d'axe (AB) .

Les points 2, 4, 6, $2', 4', 6'$ appartiennent à un cercle égal au précédent et aussi d'axe (AB) .



Lorsqu'on projette la figure formée par C et C' sur un plan P perpendiculaire à (AB) , on obtient deux hexagones réguliers de même centre O .

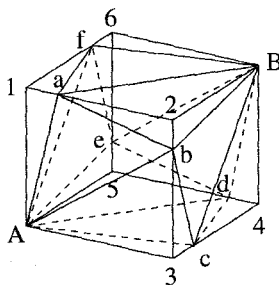
Les segments $[1 1']$ et $[2 6']$ sont dans des plans parallèles au plan P et ont des projections qui sont des segments parallèles, donc ces deux segments sont parallèles.

Donc $(1 2)$ et $(1' 6')$ sont deux droites coplanaires, elles se coupent en un point a .

De même on obtient b, c, d, e, f .

Les points a, b, c, d, e, f partagent les arêtes du cube C auquel ils appartiennent dans le même rapport car il en est de même pour les projections sur P et que ces arêtes de C font toutes le même angle avec P .

[Remarque : ces raisonnements pourraient être simplifiés si l'on pouvait utiliser les isométries de l'espace : réflexion par rapport au plan médiateur de $[1\ 1']$, rotation d'axe (AB) d'angle $2\pi/3$]



Soit l la longueur de l'arête de C . Posons x longueur $a1$.

On a : $x = a1 = b2 = c3 = d4 = e5 = f6$ et $l - x = a2 = b3 = c4 = d5 = e6 = f1$.

Ayant les points a, b, c, d, e, f , communs entre les arêtes de C et de C' , les segments $[ab], [bc], [cd], [de], [ef], [fa]$ qui les joignent sont communs à des faces de C et C' ainsi que les segments $[Aa], \dots [Af], [Ba], \dots [Bf]$. La portion d'espace commune à C et C' a des faces triangulaires (il y en a 12). Les côtés de chacun de ces triangles sont 3 des 18 arêtes qui viennent d'être obtenues. Par suite pour obtenir le volume de $C \cap C'$ il faut retirer à C 6 tétraèdres isométriques : $(Aaf), (Abc), (Ade),$ et $(Bab), (Bcd), (Bef)$. $V = l^3$; le volume de $C \cap C'$ est

$$l^3 - 6 \times \frac{1}{3} l \times \frac{1}{2} x (l - x) = l(l^2 - xl + x^2) = l \left[\left(x - \frac{l}{2} \right)^2 + \frac{3l^2}{4} \right] \geq \frac{3l^3}{4} = \frac{3V}{4} (*)$$

Le minimum cherché est $3V/4$, il est obtenu pour $x = \frac{l}{2}$ (seul cas où a, b, c, d, e, f sont coplanaires).

SOLUTION 2

(E. Trotoux - Lycée De Gaulle Caen)

Dans un premier temps, on peut observer que les cubes C et C' sont superposables par pivotement ¹ de C autour de l'axe (AB) . Les diagonales d'un cube étant des axes d'ordre trois, on peut se limiter à un pivotement d'angle dont la mesure en radians est strictement comprise entre 0 et $2\pi/3$.

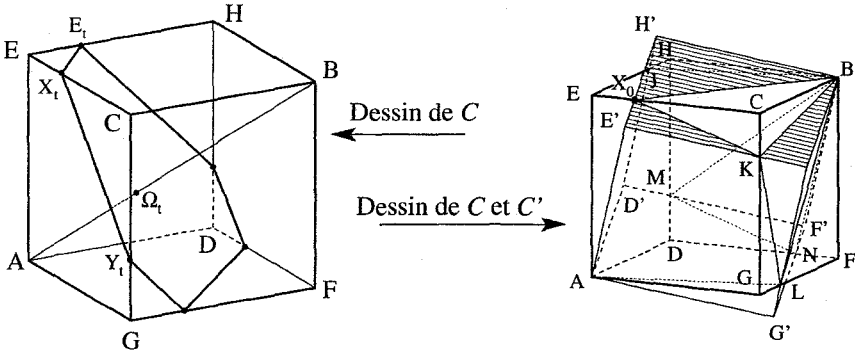
Ensuite, on peut remarquer que les sommets de C et C' autres que A et B sont situés dans les plans parallèles (EGD) et (HCF) (En effet, les plans orthogonaux à (AB) sont globalement invariants par les pivotements d'axe (AB)). Il en découle un régionnement de l'espace en trois régions, également globalement invariantes par les pivotements d'axe (AB) , de frontières les plans (EGD) et (HCF) . De cela on

(*) NDLR : les deux facteurs du produit $x(l - x)$ ont leur somme constante : leur produit est maximum (donc celui de $C \cap C'$) quand ils sont égaux. Ce théorème, démontrable dès la 4^{ème} intervient si souvent qu'il gagnerait à être connu.

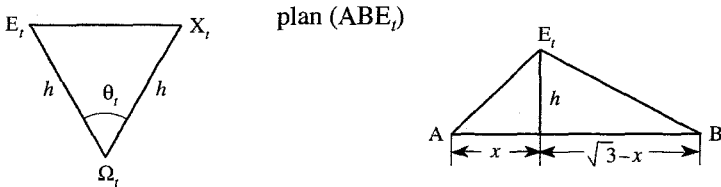
¹ ce terme est peut-être plus intuitif que celui de "rotation" qui se réfère au plan pour l'élève de première S.

déduit que les trois arêtes issues de A du cube C ne peuvent pas rencontrer des arêtes de C' ailleurs qu'en A (Par l'absurde : dans le cas contraire, il y aurait des sommets communs à C et C' dans le plan (EGD), ce qui conduirait à la superposition de C et C'). De même pour les trois arêtes issues de B du cube C qui ne peuvent pas rencontrer des arêtes de C' ailleurs qu'en B. Il reste alors six arêtes de C susceptibles de couper les six arêtes de C' situées dans la région limitée par les plans (EGD) et (HCF), donc en dehors de A et B.

Guidé par l'intuition, il semble que $[E'H']$ homologue de $[EH]$ dans le pivotement, rencontre l'arête $[EC]$. Pour le prouver, nous allons déterminer le point de $[EH]$ dont l'image par le pivotement qui envoie C sur C' est sur $[EC]$.



Désignons, pour $t \in]0, 1[$, par E_t le point tel que $\overrightarrow{EE_t} = t\overrightarrow{EH}$, par X_t le point tel que $\overrightarrow{EX_t} = t\overrightarrow{EC}$ et Y_t le point tel que $\overrightarrow{CY_t} = (1-t)\overrightarrow{CG}$. Le plan $(E_t X_t Y_t)$ contient deux droites sécantes qui sont orthogonales à (AB) : il est donc orthogonal à (AB) . Posons $\Omega_t = (E_t X_t Y_t) \cap (AB)$. Dans toute la suite on choisira l'arête de C comme longueur unité. Exprimons la mesure de θ_t de $\widehat{E_t \Omega_t X_t}$ en fonction de t .



On a donc $\overrightarrow{E_t X_t} = t\overrightarrow{HC}$ d'où $E_t X_t^2 = 2t^2$. Posons $h = E_t \Omega_t = X_t \Omega_t$, alors

$$\sin^2 \frac{\theta_t}{2} = \frac{2t^2}{4h^2} = \frac{t^2}{2h^2}.$$

Déterminons alors h en fonction de t . Pour cela plaçons-nous dans le plan (AE_tB) , posons $x = A\Omega_t$ et utilisons le théorème de Pythagore :

$$AE_t^2 = AE^2 + EE_t^2 = 1 + t^2 \text{ et } BE_t^2 = BH^2 + HE_t^2 = 1 + (1-t)^2 \text{ d'où}$$

$$h^2 + x^2 = 1 + t^2 \text{ et } h^2 + (\sqrt{3} - x)^2 = 1 + (1-t)^2.$$

Par élimination de h , on trouve : $x = \frac{3+t^2-(1-t)^2}{2\sqrt{3}} = \frac{1+t}{\sqrt{3}}$ et, par substitution,

on en déduit que $h^2 = \frac{2t^2 - 2t + 2}{3}$. En reportant cette valeur dans l'expression de

$$\sin^2 \frac{\theta_t}{2}, \text{ on obtient d'abord : } \sin^2 \frac{\theta_t}{2} = \frac{3t^2}{2(2t^2 - 2t + 2)}$$

puis, enfin, à l'aide de $\cos(\theta) = 1 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$, la relation : $\cos(\theta_t) = \frac{2 - 2t - t^2}{2(t^2 - t + 1)}$.

L'étude sur $]0, 1[$ sur de la fonction $t \mapsto \frac{2 - 2t - t^2}{2(t^2 - t + 1)}$ révèle une bijection dérivable

strictement décroissante de $]0, 1[$ sur $\left] \frac{-1}{2}, 1 \right[$. La fonction \cos définit une bijec-

tion strictement décroissante de $]0, \frac{2\pi}{3}[$ sur $\left] \frac{-1}{2}, 1 \right[$. Nous pouvons alors conclure

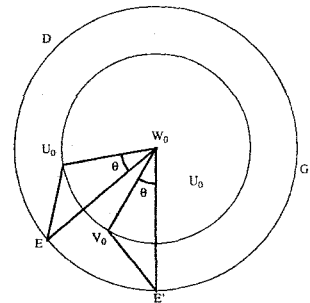
qu'il existe un unique réel t_0 de $]0, 1[$ tel que $\theta_{t_0} = \theta$ où θ est la mesure de l'angle du pivotement qui superpose C sur C' . On peut calculer t_0 algébriquement en fonction de $\cos\theta$ par résolution d'une équation du second degré.

Revenons à notre préoccupation initiale. Considérons le point X_{t_0} défini par la valeur t_0 obtenue plus haut et prouvons que ce point appartient à $[E'H']$. Voici au moins deux argumentations envisageables.

La première :

On vérifie que $E'H' = E'X_{t_0} + X_{t_0}H'$ par le calcul de $E'X_{t_0}$ et de $X_{t_0}H'$.

En projetant orthogonalement (i.e. parallèlement à (AB)) les points E_{t_0} , X_{t_0} et Ω_{t_0} sur le plan (EGD) en U_0 , V_0 et W_0 , on obtient deux triangles W_0U_0E et W_0V_0E' qui se correspondent par la rotation plane de centre W_0 et d'angle θ . En effet, les plans (EGD) et $(E_{t_0} X_{t_0} \Omega_{t_0})$ sont parallèles donc les angles se conservent dans la projection. On a donc $U_0E = V_0E'$ et par suite les triangles rectangles $E_{t_0}U_0E$ et $X_{t_0}V_0E'$



ont leurs côtés de l'angle droit respectivement égaux car $E_{t_0}U_0 = X_{t_0}V_0 = W_0\Omega_{t_0}$ (distance des plans (EGD) et $(E_{t_0} X_{t_0}\Omega_{t_0})$). Les hypoténuses de ces triangles sont donc égales : $E_{t_0}E = X_{t_0}E'$. On a donc $X_{t_0}E' = t_0$ d'après la définition de E_{t_0} . Le même raisonnement appliqué au plan (CFH) conduit à $X_{t_0}H' = 1 - t_0$. Finalement $X_{t_0}E' + X_{t_0}H' = t_0 + 1 - t_0 = 1$, ce qui établit $E'H' = E'X_{t_0} + X_{t_0}H'$.

La seconde :

On utilise le fait qu'une isométrie (ici la rotation d'axe (AB) qui envoie C sur C') transforme un segment en un segment dont les extrémités sont les images des extrémités du segment transformé. On l'applique ici avec le segment [EH] qui contient le point E_{t_0} . On conclut que l'image X_{t_0} de E_{t_0} est sur le segment transformé [E'H'].

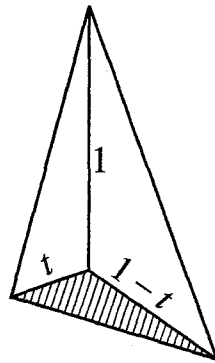
Nous venons de prouver que les arêtes [EC] et [E'H'] ont un point commun que l'on peut localiser en fonction de l'angle du pivotement qui envoie C sur C'. Par les rotations d'axe (AB) d'angles $\frac{2\pi}{3}$ et $\frac{4\pi}{3}$, on peut en déduire que les arêtes [GF] et [G'C'] puis [DH] et [D'F'] ont un point commun. Les trois points ainsi obtenus forment un triangle équilatéral de plan orthogonal à (AB).

Par la symétrie centrale ayant pour centre le milieu de [AB], on obtient trois nouveaux points communs aux paires d'arêtes {[DF], [F'G']}, {[EH], [D'H']}, et {[GC], [E'C']} formant aussi un triangle équilatéral de plan orthogonal à (AB).

Nous avons ainsi justifié que les six arêtes de C situées entre (EGD) et (HCF) rencontrent six arêtes de C' en six points distincts de A et B et précisé la disposition mutuelle de ces points.

Etude du volume commun à C et C'.

Le volume commun est minimum ssi le volume des tétraèdres extérieurs à C est maximum. Ces six tétraèdres ont tous des caractéristiques de dimension identiques : une "base" constituée d'un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit mesurent t et 1 - t où $t \in]0, 1[$ et un "sommet" situé perpendiculairement à la distance unité, 1, du point de la base correspondant à l'angle droit. Le volume des six tétraèdres vaut donc : $t \times (1 - t) \times 1$ et présente un maximum pour $t = \frac{1}{2}$ valant $\frac{1}{4}$. Le cube C' ayant un volume



égal à l'unité de volume, le volume minimum vaut donc $\frac{3}{4}$ d'unité de volume. Le

minimum est atteint lorsque C et C' ont leurs arêtes, non issues de A ou B, sécantes en leur milieu. Dans ce cas les points d'intersection forment un hexagone régulier centré au centre de C dans un plan orthogonal à (AB). On peut vérifier que la relation entre θ_t et t,

$$\cos(\theta_t) = \frac{2 - 2(1/2) - (1/2)^2}{2((1/2)^2 - (1/2) + 1)} = \frac{1}{2}$$

donne la valeur attendue ($\theta = \pi/3$) pour $t = \frac{1}{2}$.

COMPLÉMENTS ET COMMENTAIRES

Clermont-Ferrand

La première question consiste à démontrer que les arêtes des deux cubes se coupent en 6 points exactement (hormis les extrémités de la diagonale commune).

Les deux cubes « emprisonnent » un volume commun (voir la figure n° 1).

La deuxième question consiste à calculer le pourcentage du volume du cube n° 1 minimal emprisonné.

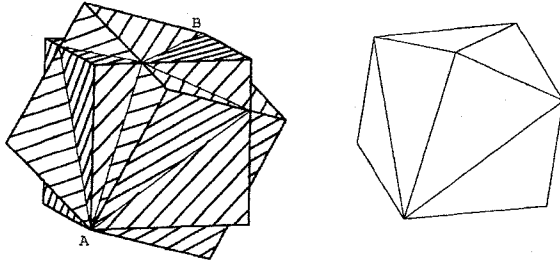
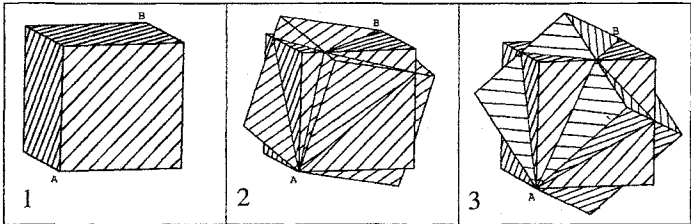


figure 1

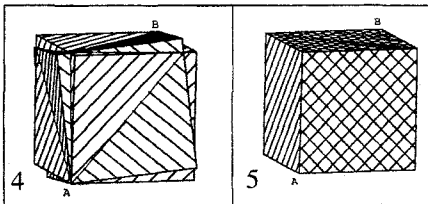
Voici, à l'aide d'un logiciel de géométrie la visualisation de la réponse à la première question. Comptez les points d'intersection...



1 Les deux cubes sont superposés

2 Le cube n°2 tourne

3 Dans cette position, le volume emprisonné est minimal



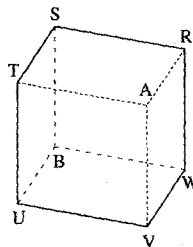
(4) Le cube n° 2 tourne encore

(5) Le cube n° 2 se confond avec le cube n°1.

A. Voisin (Créteil)

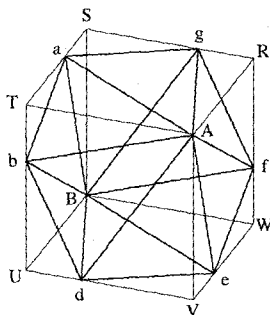
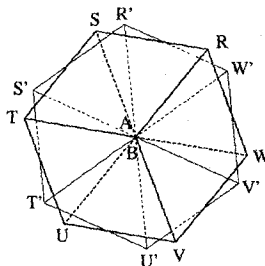
C'était l'exercice le plus difficile des quatre (le premier obstacle étant à coup sûr de se représenter la figure formée par les deux cubes de diagonale commune.)

Un premier point consistait à remarquer que chaque cube comportait 6 arêtes issues de A et de B et qu'elles ne pouvaient couper leurs homologues de l'autre cube ailleurs qu'en A et B. Il ne pouvait y avoir plus de 6 points d'intersection, correspondant aux six arêtes.



Deuxième point délicat : pourquoi les arêtes $[T'U']$ et $[UV]$ par exemple peuvent-elles se couper ?

Vus de dessus, $RSTUVW$ et $R'S'T'U'V'W'$ ont pour projection des hexagones réguliers. De plus, dans la rotation autour de (AB) , les points T' et V d'une part, U et U' d'autre part restent coplanaires. Ceci implique que les segments $[T'V]$ et $[UU']$ sont parallèles et coplanaires et par suite que les droites $[T'U']$ et $[UV]$ sont sécantes.



Le calcul du volume limité par l'intersection n'est pas le plus difficile. De façon générale, cette intersection s'obtient en enlevant au cube "immobile" 6 tétraèdres isométriques à $BbUd$ par exemple.

En appelant l la longueur d'un côté du cube et x la longueur Ud , on a $bU = l - x$, ce qui permet de calculer le volume de $BbUd$, puis celui V de l'intersection. On trouve : $V = l^3 - 6 \times (1/3) \times l \times (1/2) \times x(l - x)$.

V est minimum pour $x = l/2$ et vaut alors $(3/4)V$.

M. Regnault

Un beau sujet pour construire une séance de travaux dirigés sur les isométries de l'espace avec une ouverture sur les polyèdres composés ... en terminale, il y a quelques années déjà! ... mais les élèves de 1^{ère} S auxquels il était proposé, on clairement manqué de temps et surtout de moyens pour l'aborder sérieusement. Pour eux qui se sont un peu exprimés sur le sujet, on constate qu'ils possèdent la notion de rotation autour d'un axe mais elle reste imprécise (en particulier pour l'angle) et sa mise en œuvre ne suit pas : par exemple, on ne trouve que très rarement l'idée de projeter orthogonalement sur un plan orthogonal à l'axe pour se ramener à une rotation plane et étudier ainsi précisément les images de B, C, D et de F, G, H et encore moins celle de projeter orthogonalement sur un même plan pour obtenir un hexagone et son image par rotation autour de son centre.

On a pu cependant remarquer quelques figures correctes et même deux ou trois soignées et précises, par contre d'autres étaient fantaisistes voire paradoxales. Dans quelques copies apparaissaient l'idée sous-jacente d'axe d'ordre 3 et celle qu'une rotation d'angle $\pi/3$ permet d'obtenir la configuration qui donne la valeur minimale du volume de la partie commune aux deux cubes.

J. Cl. Emeillat (Rennes)

C'est certainement le plus difficile des quatre exercices. L'élève qui est capable de faire cet exercice est, à coup sûr, très brillant. Il faut bien sûr avoir une bonne vision dans l'espace et penser à projeter les deux cubes sur un plan perpendiculaire à leur axe commun (ce qui donne deux hexagones). Ceci permet de déterminer où sont les points d'intersection, mais le travail est loin d'être fini quand on a fait cela !

Quant à la recherche de la position qui donne le volume minimal, c'est pratiquement infaisable si on ne voit pas que le volume est égal au cube dont on a retiré six petits tétraèdres.

Bref, un bel exercice de géométrie pure.