CRÉTEIL

Le candidat choisit de traiter deux exercices parmi les trois suivants.

Exercice n° 1

Enoncé

Des bulles de couleurs

Dans un très grand récipient contenant de l'eau, on observe trois sortes de bulles colorées, les unes sont formées d'un gaz bleu, d'autres d'un gaz vert, la troisième catégorie d'un gaz jaune.
Ces bulles peuvent se cogner.

- Soit les deux bulles sont de la même couleur, il ne se passe rien, elles repartent chacune de leur côté.
- Soit elles sont de couleurs différentes, tout dépend alors de leurs couleurs respectives :
  - ♦ Si une bleue rencontre une verte, elles disparaissent toutes les deux et donnent naissance immédiatement à quatre bulles vertes.
  - ♦ Si une bulle jaune et une bulle bleue se cognent, elles disparaissent toutes les deux et donnent naissance immédiatement à deux bulles vertes.
  - ♦ Si la rencontre s'opère entre une jaune et une verte, elles disparaissent et donnent naissance immédiatement à trois bulles vertes.

1. On a dans le récipient deux bulles jaunes, une verte, deux bleues.
Ecrire les états possibles du système des bulles après une seule rencontre. Si les rencontres se font au hasard, y a-t-il plus de deux chances sur trois qu'il y ait au moins trois bulles vertes après cette unique rencontre ?

2. On suppose maintenant que, la composition en bulles dans le récipient, est telle qu'à un moment donné, la différence $n_v - n_j$ où n_v est le nombre de bulles vertes et n_j celui de bulles jaunes est égal à l'entier d.

a) Il se produit une nouvelle rencontre, que devient ce nombre ?
b) Au début de l'observation, on a dans le récipient 65 bulles jaunes, 26 bulles vertes et 35 bulles bleues.
Pourra-t-on après un nombre fini de rencontres, avoir autant de vertes que de jaunes ?
S*i oui en combien de rencontres au minimum ? au maximum ?*
Même question en enlevant dès le début de l'observation une bulle jaune.
3 . On suppose que le récipient contient suffisamment de bulles de chaque couleur pour que les rencontres de tous les types puissent avoir lieu à l'infini.
Donner tous les gains possibles de bulles vertes après tous les types de rencontres.
Quelles successions de rencontres donnent un gain de 12 bulles vertes ?
Même question pour un gain de N bulles vertes.

Solution(P.L.H.)

1.

JJVBB	→ JJVBB	si 2 bulles de la même couleur
	→ JJVVVVB	si BV
	→ JVVVB	si BJ
	→ JVVVBB	si JV

Il y a au moins trois vertes sauf si les deux bulles sont de même couleur.
Il y a $\binom{5}{2} = 10$ paires de 2 bulles dont (JJ et BB) de la même couleur.
La probabilité d'avoir 2 bulles de même couleur est donc $\dfrac{2}{10} = \dfrac{1}{5} < \dfrac{1}{3}$.
La réponse à la question est donc deux **OUI**.
2.a) Si la nouvelle rencontre concerne
- deux bulles de même couleur, $n_v - n_j$ est inchangé ;
- une bleue et une verte, $n_v - n_j$ augmente de 3 ;
- une jaune et une bleue, $n_v - n_j$ augmente de 3 ;
- une jaune et une verte, $n_v - n_j$ augmente de 3 ;

2.b) On part de $n_v - n_j = -39$, multiple de 3 donc $n_v - n_j = 0$ si 13 fois il augmente de 3, ce qui est possible en 13 coups au minimum, mais ce nombre de coups n'est pas borné si l'on tire toujours des bulles de la même couleur.

Si, par contre, $n_v - n_j = -38$, $n_v - n_j$ ne sera jamais un multiple de 3 donc il ne s'annulera jamais.

3. Le nombre de vertes à chaque rencontre peut
- rester inchangé,
- augmenter de 3,
- augmenter de 2.

Le gain est donc de la forme $3p + 2q$ avec $p, q \in \mathbb{N}$.

On a $3p + 2q = 12$ avec soit $p = 0, q = 6$; $p = 2, q = 3$; $p = 4, q = 0$.
$3p + 2q = N$ a des solutions si et seulement si $N \geqslant 2$.

Remarque : Exercice très long (9 questions). Une question de probabilité.

Exercice n° 2

Enoncé

Les nombres ondulés

I) Si n est un nombre entier naturel tel que $0 < n < 10$, on appelle « nombre ondulé à n chiffres » un nombre entier naturel N satisfaisant aux conditions suivantes :

- son écriture décimale utilise n chiffres non nuls tous distincts
- si a, b, c sont trois chiffres apparaissant consécutivement dans cet ordre dans l'écriture décimale de N, alors, aucune des doubles inégalités $a < b < c$ et $a > b > c$ n'est vérifiée.

Si, de plus, les n chiffres apparaissant dans l'écriture de N sont tous les chiffres de 1 à n, on dit que N est un « nombre ondulé primitif ».

Exemples :
Les nombres 1 ; 21 ; 132 et 4132 sont des nombres ondulés primitifs ; les nombres 4 ; 17 et 827 sont des nombres ondulés. Par contre, 4213 n'est pas un nombre ondulé, car on a 4>2>1.

1°) Écrire tous les nombres ondulés primitifs à 1 chiffre, à 2 chiffres, à 3 chiffres et à 4 chiffres.

2°) On désignera par P_n le nombre de nombres ondulés primitifs à n chiffres. Déterminer P_1, P_2, P_3 et P_4. Combien existe-t-il de nombres ondulés à 4 chiffres construits avec les chiffres 3, 5, 8 et 9 ?
Qu'observe t'on ?