OLYMPIADES INTERNATIONALES

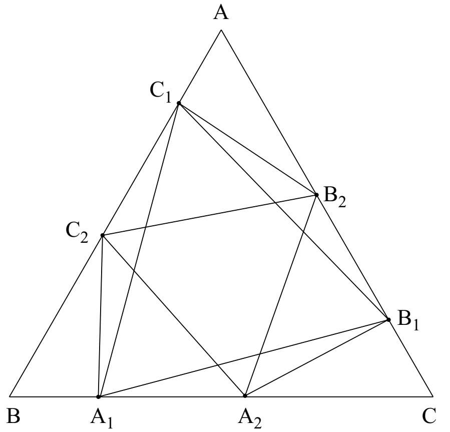
Nous joignons ici deux des six problèmes des Olympiades Internationales 2005 (Mérida, Mexique).

Exercice n° 1

Enoncé

Six points sont choisis sur les côtés d'un triangle équilatéral ABC ; A_1, A_2 sur [BC], B_1, B_2 sur [CA] et C_1, C_2 sur [AB].
Ces points sont les sommets d'un hexagone convexe $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ dont les côtés sont égaux.
Montrer que les droites (A_1B_2), (B_1C_2) et (C_1A_2) sont concourantes.

Solutions 1 et 2(P.L.H.)



Nous reviendrons plus tard sur la construction de la figure que nous supposerons réalisée.

1$^{\text{ère}}$ solution : Angles et similitude

On a $(\widehat{\mathrm{C_1A_1B_1}}) = \pi - (\widehat{\mathrm{BA_1C_2}}) - (\widehat{\mathrm{C_2A_1C_1}}) - (\widehat{\mathrm{CA_1B_1}})$.
puis, le triangle $\mathrm{A_1C_2C_1}$ étant isocèle par construction,

$$(\widehat{\mathrm{BC_2A_1}}) = 2(\widehat{\mathrm{C_2A_1C_1}})$$

et, le triangle ABC étant équilatéral,

$$(\widehat{\mathrm{BA_1C_2}}) = \pi - \frac{\pi}{3} - (\widehat{\mathrm{BAC_2A_1}}) = 2\left(\frac{\pi}{3} - (\widehat{\mathrm{C_2A_1C_1}})\right)$$

d'où $(\widehat{\mathrm{C_1A_1B_1}}) = \dfrac{\pi}{3} + (\widehat{\mathrm{C_2A_1C_1}}) - (\widehat{\mathrm{CA_1B_1}})$

De même, $(\widehat{\mathrm{C_2A_2B_2}}) = \pi - (\widehat{\mathrm{BA_2C_2}}) - (\widehat{\mathrm{B_1AB_2}}) - (\widehat{\mathrm{CA_2B_1}})$

et $(\widehat{\mathrm{A_2B_1C}}) = 2(\widehat{\mathrm{B_1A_2B_2}}),\ (\widehat{\mathrm{CA_2B_1}}) = 2(\widehat{\mathrm{CA_1B_1}})$

avec $(\widehat{\mathrm{A_2B_1C}}) + (\widehat{\mathrm{CA_2B_1}}) = \dfrac{2\pi}{3}$ et $(\widehat{\mathrm{BA_1C_2}}) = 2(\widehat{\mathrm{BA_2C_2}})$.

D'où

$$\begin{aligned}(\widehat{\mathrm{C_2A_2B_2}}) &= \pi - \frac{(\widehat{\mathrm{BA_1C_2}})}{2} - \left(\frac{\pi}{3} - (\widehat{\mathrm{CA_1B_1}})\right) - 2(\widehat{\mathrm{CA_1B_1}})\\ &= \frac{\pi}{3} + (\widehat{\mathrm{C_2A_1C_1}}) - (\widehat{\mathrm{CA_1B_1}})\\ &= (\widehat{\mathrm{C_1A_1B_1}})\end{aligned}$$

De même, $(\widehat{\mathrm{A_2B_2C_2}}) = (\widehat{\mathrm{A_1B_1C_1}})$; on en déduit que les triangles $\mathrm{A_1B_1C_1}$ et $\mathrm{A_2B_2C_2}$ sont semblables.

Si on note ℓ la longueur commune des six côtés de l'hexagone, on a
$A_1B_1 = 2\ell\ \cos(\widehat{\mathrm{C_1A_2B_1}})$
et $A_2B_2 = 2\ell \cos(\widehat{\mathrm{B_1A_2B_2}}) = 2\ell \cos\left(\dfrac{\pi}{3} - (\widehat{\mathrm{CA_12B_1}})\right)$

donc $(\widehat{\mathrm{CA_2B_1}}) \leqslant \dfrac{\pi}{3}$

et $$\begin{aligned}\frac{A_2B_2}{A_1B_1} &= \frac{\cos\frac{\pi}{3}\ \cos(\widehat{\mathrm{CA_2B_1}}) + \sin\frac{\pi}{3}\ \sin(\widehat{\mathrm{CA_2B_1}})}{\cos(\widehat{\mathrm{CA_2B_1}})}\\ &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\ \tan(\widehat{\mathrm{CA_2B_1}}).\end{aligned}$$

Comme la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} \tan x$ est une bijection de $\left[0,\ \dfrac{\pi}{3}\right]$ sur $\left[\dfrac{1}{2},\ \dfrac{3}{2}\right]$ et que $\dfrac{A_2B_2}{A_1B_1} = \dfrac{B_2C_2}{B_1C_1} = \dfrac{C_2A_2}{C_1A_1}$,

il en résulte que $(\widehat{\mathrm{CA_2B_1}}) = (\widehat{\mathrm{AB_2C_1}}) = (\widehat{\mathrm{BC_2A_1}})$,
ainsi que $(\widehat{\mathrm{C_1A_1B_1}}) = (\widehat{\mathrm{A_1B_1C_1}}) = (\widehat{\mathrm{B_1C_1A_1}})$
et que les deux triangles $\mathrm{A_1B_1C_1}$ et $\mathrm{A_2B_2C_2}$ sont équilatéraux.

Soit I le centre du triangle ABC. La figure est invariante par la rotation de centre I et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$. I est en particulier le centre des deux triangles $\mathrm{A_1B_1C_1}$ et $\mathrm{B_2C_2A_2}$ qui sont homothétiques dans l'homothétie de centre I et de rapport $-\left[\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} \tan(\widehat{\mathrm{CA_2B_1}})\right]$ et les droites$(\mathrm{A_1B_2})$, $(\mathrm{B_1C_2})$ et $(\mathrm{C_1A_2})$ se coupent en I.

2$^{\text{ème}}$ solution : Barycentres

Prenons comme unité la longueur $AB = BC = CA$ et soit I le centre du triangle ABC.

On a : $\overrightarrow{\mathrm{IA}} + \overrightarrow{\mathrm{IB}} + \overrightarrow{\mathrm{IC}} = 0$

$$IA^2 = IB^2 = IC^2 = \frac{1}{3}$$

et $\overrightarrow{\mathrm{IA}}.\overrightarrow{\mathrm{IB}} = \overrightarrow{\mathrm{IB}}.\overrightarrow{\mathrm{IC}} = \overrightarrow{\mathrm{IC}}.\overrightarrow{\mathrm{IA}} = \dfrac{1}{3}\cos^2\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{6}$.

Posons
$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{IA_1}} &= \lambda_1\overrightarrow{\mathrm{IB}} + (1-\lambda_1)\overrightarrow{\mathrm{IC}} \quad \text{avec } 0 \leqslant \lambda_1 \leqslant 1\\
\overrightarrow{\mathrm{IB_1}} &= \mu_1\overrightarrow{\mathrm{IC}} + (1-\mu_1)\overrightarrow{\mathrm{IA}}\\
\overrightarrow{\mathrm{IC_1}} &= \nu_1\overrightarrow{\mathrm{IA}} + (1-\nu_1)\overrightarrow{\mathrm{IC}}
\end{aligned}$$

et de même avec l'indice 2.
La convexité de l'hexagone implique $\lambda_2 \leqslant \lambda_1$, $\mu_2 \leqslant \mu_1$, $\nu_2 \leqslant \nu_1$ et l'égalité de ses côtés, de longueur ℓ,
$\overrightarrow{\mathrm{A_1A_2}} = \ell\,\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ d'où $(\lambda_1 - \lambda_2)\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \ell\,\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ et $\lambda_2 = \lambda_1 - \ell$.

L'égalité $\mathrm{A_2B_1} = \ell$ s'écrit

$$\begin{aligned}
\ell^2 = \left(\overrightarrow{\mathrm{IB_1}} - \overrightarrow{\mathrm{IA_2}}\right)^2 &= \left([\mu_1 - (1-\lambda_1+\ell)]\,\overrightarrow{\mathrm{IC}} - (\lambda_1-\ell)\overrightarrow{\mathrm{IB}} + (1-\mu_1)\overrightarrow{\mathrm{IA}}\right)^2\\
&= (\mu_1-1)^2 + (\mu_1-1)(\lambda_1-\ell) + (\lambda_1-\ell)^2
\end{aligned}$$

ou $0 = (\mu_1 - 1)^2 + (\mu_1 - 1)(\lambda_1 - \ell) + \lambda_1^2 + 2\lambda_1\ell$
ou $\ell(\mu_1 + 2\lambda_1 - 1) = (\mu_1 - 1)^2 + \lambda_1(\mu_1 - 1) + \lambda_1^2$
et, par permutation circulaire,

$$\ell(\nu_1 + 2\mu_1 - 1) = (\nu_1 - 1)^2 + \mu_1(\nu_1 - 1) + \mu_1^2$$
$$\ell(\lambda_1 + 2\nu_1 - 1) = (\lambda_1 - 1)^2 + \nu_1(\lambda_1 - 1) + \nu_1^2.$$

Posons $\lambda_1 + \mu_1 + \nu_1 = S,\ \lambda_1 + \mu_1 = \alpha,\ \lambda_1 - \nu_1 = \beta$ d'où $\mu_1 - \nu_1 = \beta - \alpha$.
En retranchant la deuxième équation de la première, on obtient :

$$\ell\beta + \alpha) = \beta(S - 1) + \alpha$$

et la troisième de la première

$$\ell(2\beta - \alpha) = (\beta - \alpha)S + 2\alpha - \beta$$

on en déduit $(\beta + \alpha)\left[(\beta - \alpha)S + 2\alpha - \beta\right] = (2\beta - \alpha)\left[\beta(S - 2) + \alpha\right]$
ou $\quad S\left(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2\right) = 3\left(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2\right)$
or on a $\quad \alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2 > 0$ sauf si $\alpha = \beta = 0$.

Comme $\lambda_1,\ \mu_1$ et ν_1 sont majorés par 1, on ne peut avoir $S = 3$ que si $\lambda_1 = \mu_1 = \nu_1 = 1$.
Dans tous les cas on a donc $\lambda_1 = \mu_1 = \nu_1$ et les deux triangles $\mathrm{A_1B_1C_1}$ et $\mathrm{A_2B_2C_2}$ sont équilatéraux. $\mathrm{C_1}$ et $\mathrm{A_2}$ sont tous les deux sur la médiatrice de $[\mathrm{A_1B_1}]$ qui est aussi celle de $[\mathrm{A_2B_2}]$ et qui passe par I ainsi que $[\mathrm{A_1B_2}]$ et $[\mathrm{B_1C_2}]$.

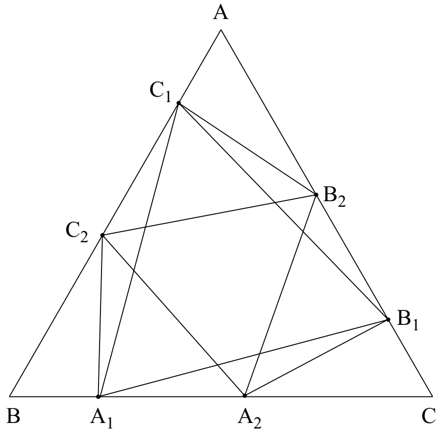
Revenons sur la construction de la figure :
le triangle équilatéral ABC étant donné, choisissons un point $\mathrm{A_1}$, sur [BC], puis $\mathrm{B_1}$ sur [CA] et $\mathrm{C_1}$ sur [AB] tels que $BA_1 = CB_1 = AC_1$.
La médiatrice de $[\mathrm{A_1B_1}]$ doit couper $[\mathrm{A_1C}]$, ce qui impose $CA_1 = \lambda_1 \geqslant CB_1 = 1 - \lambda_1$, d'où $\lambda_1 \geqslant \dfrac{1}{2}$: $\mathrm{A_1}$ doit être choisi sur $[\mathrm{BA_0}]$ en notant $\mathrm{A_0}$ le milieu de [AB].

Soit $\mathrm{A_2}$ le point d'intersection de cette médiatrice avec $[\mathrm{A_1C}]$, on en déduit $\ell = A_1A_2 = A_2B_1$. On construit alors $\mathrm{B_2}$ tel que $B_2B_1 = \ell$ et $\mathrm{C_2}$ tel que $C_2C_1 = \ell$.

Remarque : Le point difficile de ce problème tient dans la démonstration qu'on obtient ainsi tous les hexagones possibles.
On obtient une situation analogue pour un $2n$-gone inscrit dans un n-gone régulier et ayant tous ses côtés de même longueur.

3$^{\text{ème}}$ Solution

Communiquée par François Lo Jacomo



Soit Q le point intérieur au triangle ABC tel que QA_1A_2 soit équilatéral. Les vecteurs $\overrightarrow{QA_1}$ et $\overrightarrow{C_1C_2}$ sont égaux, donc $QC_1C_2A_1$ est un parallélogramme : c'est même un losange sont la diagonale (QC_2) est axe de symétrie.
$QB_2B_1A_2$ est lui aussi un losange, si bien que QB_2C_1 est un triangle équilatéral.
La symétrie par rapport à (QC_2) envoie A_1 en C_1, donc le triangle équilatéral QA_1A_2 (extérieur au losange) en le triangle équilatéral extérieur au losange QC_1B_2.
On en déduit que (QC_2) est aussi axe de symétrie (donc diagonale) du losange $QB_2B_1A_2$: la droite (QC_2) n'est autre que (B_1C_2), diagonale et axe de symétrie de lźhexagone. Et la symétrie par rapport à cette diagonale (B_1C_2) transforme une seconde diagonale (C_1A_2) en la troisième (A_1B_2), ce qui prouve que le point dźintersection de (B_1C_2) et (C_1A_2), transformé en lui-même par cette symétrie, appartient à (A_1B_2).

Ces trois diagonales concourantes sont les trois axes de symétrie de l'hexagone.

Remarque : cette solution est, à peu de chose près la solution « officielle ».

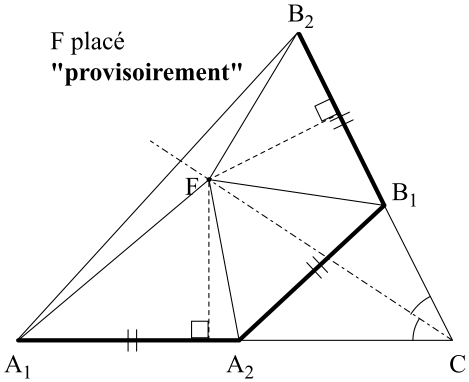
$4^{\text{ème}}$ et $5^{\text{ème}}$ solutions, et compléments

(rotations,...)

Henri Bareil

PARTIE COMMUNE

Il apparaît de nombreuses « sous-figures » analogues qui semblent se déduire les unes des autres par les rotations laissant ABC globalement invariant.
Je vais m'intéresser à l'une d'elles, par exemple au « COIN » CA_1B_2.



L'égalité des segments $[\mathrm{B_2B_1}]$ et $[\mathrm{A_2A_1}]$ implique l'existence *d'une rotation* $\mathcal{R}$, qui applique $(\mathrm{B_2},\mathrm{B_1})$ sur $(\mathrm{A_2},\mathrm{A_1})$, dont le *centre* F sera sur la bissectrice intérieure de $\widehat{\mathrm{C}}$ et *l'angle 120°* (puisque $\widehat{\mathrm{C}} = 60^\mathrm{o}$).

Les triangles $\mathrm{FB_1B_2}$ et $\mathrm{FB_1A_2}$ sont isométriques ($3^{\text{ème}}$ cas, celui des « trois côtés »). Or $\widehat{\mathrm{B_2FA_2}} = 120^\mathrm{o}$.
D'où $\widehat{\mathrm{B_2FB_1}} = \widehat{\mathrm{A_2FB_1}} = 60^\mathrm{o}$.
De même $\widehat{\mathrm{A_2FB_1}} = \widehat{\mathrm{A_2FA_1}} = 60^\mathrm{o}$.

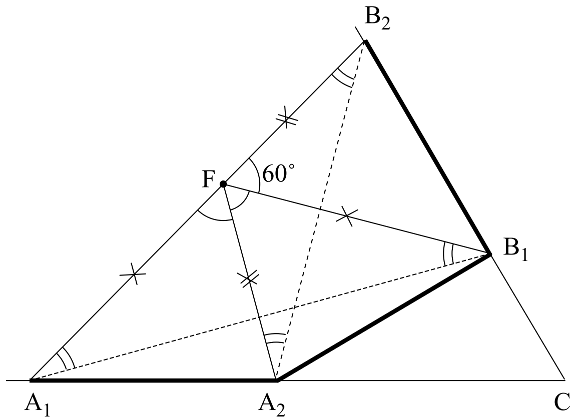
Il s'ensuit que F est sur $[\mathrm{A_1B_2}]$:

Le centre F de la rotation $\mathcal{R}$ *qui applique* $(\mathrm{B_2},\mathrm{B_1})$ *sur* $(\mathrm{A_2},\mathrm{A_1})$ *est l'intersection de* $[\mathrm{A_1B_2}]$ *et de la bissectrice de* $\widehat{\mathrm{C}}$

Remarque : Ceci permet une construction correcte de notre « coin » à partir du triangle $\mathrm{CA_1B_2}$: on obtient F puis, grâce aux angles de 60° en F, les points $\mathrm{B_1}$ et $\mathrm{A_2}$. (Il y a d'autres constructions possibles, notamment grâce à une homothétie).

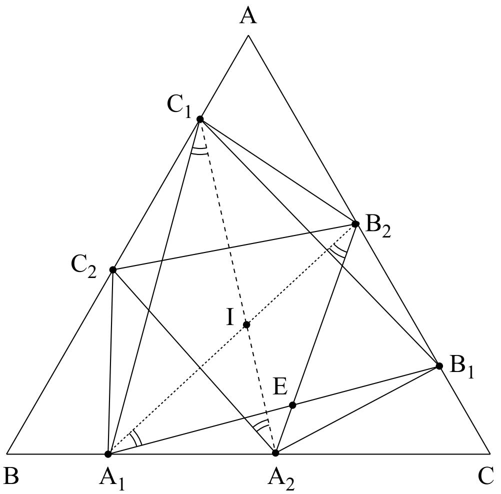
4$^{\text{ème}}$ Solution

(*suite de la partie commune précédente*).



Le triangle $\mathrm{FA_1B_1}$ est isocèle en F avec $\widehat{\mathrm{A_1FB_1}} = 120^{\mathrm{o}}$.
D'où $\widehat{\mathrm{B_1A_1B_2}} = 30^{\mathrm{o}}$. De même, avec $\mathrm{FA_2B_2}$ isocèle, $\widehat{\mathrm{A_1B_2A_2}} = 30^{\mathrm{o}}$.
Nous aurons des résultats analogues pour les deux autres « coins » en B et en A.

D'où la figure générale ci-après, où j'ai noté les angles de 30$^{\mathrm{o}}$ découverts pour les « coins » C et B, en faisant abstraction de F et de son homologue : on ne sait pas - pas encore - qu'ils sont en I.



L'égalité $\widehat{\mathrm{A_1C_1A_2}} = \widehat{\mathrm{A_1B_2A_2}}$ implique la cocyclicité de $\mathrm{A_1}$, $\mathrm{C_1}$, $\mathrm{B_2}$, $\mathrm{A_2}$.
Or $C_1B_2 = A_1A_2$.

D'où $\widehat{C_1B_2} = \widehat{A_1A_2}$ puis $\widehat{C_1A_1B_2} = \widehat{A_1C_1A_2}$ ($= 30^o$) et, entre autres, (A_1B_2) bissectrice de $\widehat{C_1A_1B_1}$ (égal à 60^o).

Les trois droites (A_1B_2), (B_1C_2), (C_1A_2) *sont aussi les bissectrices intérieures du triangle* $A_1B_1C_1$: *elles sont concourantes.*

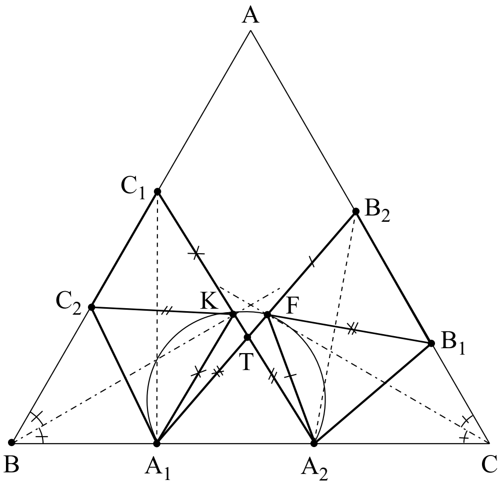
C.Q.F.D. !

(On aurait pu tout aussi bien démontrer que les trois droites (A_1B_1)... sont les bissectrices intérieures du triangle $A_2B_2C_2$).

5ème Solution

(*suite de la partie commune aux solutions 4 et 5*).

FIGURE-SCHÉMA « forcée » pour avoir K $\neq$ F



Soit les rotations de 120^o :
- $\mathcal{R}$ de centre F, telle que $(B_1,B_2) \to (A_1,A_2)$
- $\mathcal{R}'$ de centre K, telle que $(A_1,A_2) \to (C_1,C_2)$
- $\mathcal{R}$" de centre L, telle que $(C_1,C_2) \to (B_1,B_2)$

La composée des trois applications, dans l'ordre donné, envoie (B_1,B_2) *sur* (B_1,B_2). *Il s'agit de l'application identique.*

Ce qui exige :
- *soit $F = K = L$*, ce qui est possible en I centre de ABC, et là seulement, *auquel cas le problème de concours des diagonales de l'hexagone est résolu.*
- *est que FKL soit un triangle équilatéral* de même sens que ABC.

Démontrons que le second cas est impossible.

Supposons F $\neq$ K. D'où la figure « forcée » ci-dessus.
$\widehat{\mathrm{A_1FA_2}} = \widehat{\mathrm{A_1KA_2}} = 60^\circ$: K et F sont sur le même « arc capable de 60° du segment [BC] »
Selon la position de [$\mathrm{A_1A_2}$] sur [BC], nous aurons l'ordre $\mathrm{A_2}$, F, K, $\mathrm{A_1}$ (cas n° 1) ou l'ordre $\mathrm{A_2}$, K, F, $\mathrm{A_1}$ (cas n° 2).

ETUDE DU CAS n° 1, conforme à la figure ci-dessus :

($\mathrm{A_2C_1}$) et ($\mathrm{A_1B_2}$) se coupent à l'intérieur de l'arc capable. D'où, entre autres, $\widehat{\mathrm{B_2A_1C_1}} = 30^\circ + \widehat{\mathrm{FA_2K}} > 30^\circ$.
Des points $\mathrm{C_2}$ et $\mathrm{B_2}$ on voit le segment [EF] sous l'angle 30°. $\mathrm{C_2}$ et $\mathrm{B_2}$ appartiennent donc à l'arc capable correspondant.
Et $\widehat{\mathrm{B_2A_2C_1}} > \widehat{\mathrm{A_2B_2A_1}}$ entraîne $\widehat{\mathrm{B_2C_1}} > \widehat{\mathrm{A_1A_2}}$ d'où $B_2C_1 > A_1A_2$.
Avec K $\neq$ F l'hexagone aux côtés égaux n'existe donc pas.
Le cas n° 2 se traiterait de façon analogue.

L'hypothèse des points K, F, L non confondus est donc à rejeter.

C.Q.F.D. !

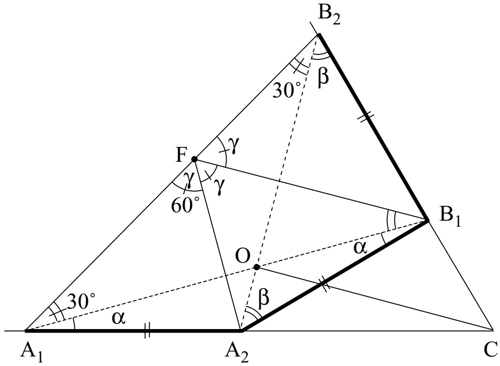
COMPLÉMENTS
(suite des solutions 4 et 5)

1 - *CONSTRUCTION DE L'HEXAGONE*
- En utilisant notamment les solutions 4 ou 5 il suffit, à partir de ABC :
  - de construire son centre I ;
  - de tracer un « soleil », de centre I, de six « rayons » faisant entre eux un angle de 60°.
- En pratique, tracer ce « soleil » sur un calque et l'appliquer…
  Toute position du « soleil » donne l'hexagone.
- Les divers hexagones obtenus sont distincts, à des rotations de $k.60^\circ$ près.

2 - *PROPRIÉTÉS DE L'HEXAGONE déjà acquises par les solutions 4 ou 5 :*
- Ses diagonales se coupent en I centre du triangle équilatéral ABC et sont des axes de symétrie de l'hexagone. Elles forment entre elles des angles de 60°.
  La figure entière (ABC et l'hexagone) est globalement invariante dans des rotations (I, $k.120^\circ$).

- Il s'ensuit :
  - des trapèzes isocèles : $A_1C_2B_2B_1$,... etc. et des losanges...
  - l'égalité des diagonales de l'hexagone,
  - $CB_1 = BA_1 = AC_1$, etc.
  - que l'hexagone peut, indépendamment de ABC, être obtenu en bordant un triangle équilatéral (soit, ici, $A_1B_1C_1$ ou $A_2B_2C_2$) par des triangles isocèles égaux.

③ - *UNE AUTRE PROPRIÉTÉ DE LA FIGURE*

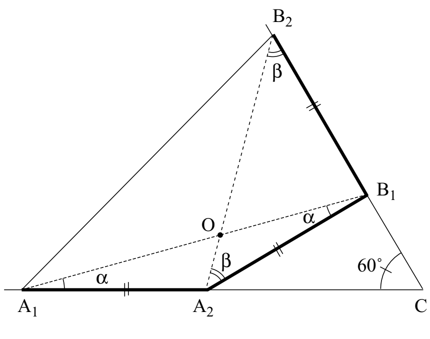


Les égalités d'angles connues, et notées ci-dessus, entraînent : $\widehat{A_1OB_2} = 120^o$.
D'où O, B_1, C, A_2 cocycliques, donc $\widehat{B_1CO} = \widehat{B_1A_2O} = \widehat{OB_2C}$.
OB_2C est isocèle avec $OB_2 = OC$. De même $OA_1 = OC$. D'où O centre du cercle circonscrit au triangle CA_1B_2.
Idem aux deux autres « coins » de ABC.

6$^{\text{ème}}$ solution

(Rédaction par Henri Bareil)

Il suffit d'étudier pas à pas les égalités d'angles qui apparaissent dans une « figure coin de ABC », par exemple :



1°) - Comme $A_2A_1 = A_2B_1$, $\widehat{\mathrm{B_1A_1A_2}} = \widehat{\mathrm{A_1B_1A_2}}$ (écrivons : $= \alpha$)
- Comme $B_1A_2 = B_1B_2$, $\widehat{\mathrm{B_1B_2A_2}} = \widehat{\mathrm{B_1A_2B_2}}$ (écrivons : $= \beta$)
- $\widehat{\mathrm{A_2B_1C}}$ étant extérieur au triangle $\mathrm{A_2B_2B_1}$, $\widehat{\mathrm{A_2B_1C}} = 2\beta$,
- $\widehat{\mathrm{B_1A_2C}}$ étant extérieur au triangle $\mathrm{A_2A_1B_1}$, $\widehat{\mathrm{B_1A_2C}} = 2\alpha$.
D'où, en utilisant le triangle $\mathrm{CA_2B_2}$, où $\widehat{\mathrm{C}} = 60°$, $\alpha + \beta = 60°$.

L'angle $\widehat{\mathrm{B_2OB_1}}$ étant extérieur au triangle $\mathrm{OA_2B_1}$, $\widehat{\mathrm{B_2OB_1}} = \alpha+\beta = 60°$.
Donc O, $\mathrm{A_2}$, $\mathrm{B_1}$, C sont cocycliques.

De là, $\widehat{\mathrm{OCB_1}} = \widehat{\mathrm{OA_2B_1}} = \beta$ et $\mathrm{OB_2C}$ isocèle : $OB_2 = OC$.

De même $OA_1 = OC$. D'où $OA_1 = OB_2$ et $\widehat{\mathrm{B_2A_1B_1}} = 30°$ (aussi $\widehat{\mathrm{A_1B_2A_2}} = 30°$).

2°) On peut ensuite démontrer, *par exemple comme dans la 4ème solution* que $\widehat{\mathrm{C_1A_1B_2}} = 30°$. D'où $(\mathrm{A_1B_2})$ bissectrice de $\widehat{\mathrm{A_1B_1C_1}}$,... Etc.

N.B.

1. A des nuances de rédaction près, ce 1° se trouve dans le manuel de Paul Bourgade : « *Olympiades internationales de mathématiques 1976-2005* » recensé dans le Bulletin APMEP n° 462. Mais le 2° est, dans ce livre, sacrifié par un « De même on démontre facilement que $\widehat{\mathrm{B_2A_1C_1}} = 30°$ » qui me semble faux par son « De même »... Quant à la « facilité »,... c'est subjectif !
2. L'hexagone dont il est question ici se trouve construit et étudié, pas du tout comme ici, mais à partir de triangles isocèles, dans le manuel de Daniel Perrin « *Mathématiques d'école* », ouvrage longuement analysé dans le même Bulletin n° 462. Je suppose qu'il est aussi, sous diverses formes, dans d'autres livres, mais je l'ignore...

Exercice n° 3

Ce problème est apparemment compliqué, mais il possède une solution extraordinairement ingénieuse, trouvée par un seul candidat (et non par le jury), de sorte qu'il mérite de figurer ici ne fût-ce que pour la beauté de cette solution.(François Lo Jacomo)