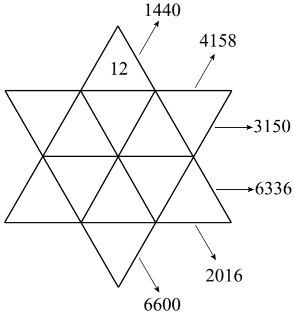
Exercice n^{o} 2

Enoncé

L'Etoile

Les nombres entiers de **1** à **12** doivent être placés dans les douze cases de l'étoile ci-dessous. La position du nombre **12** est donnée.
Les nombres écrits à l'extérieur de l'étoile sont ***les produits*** des nombres placés dans les cinq cases de l'étoile situées dans la direction de la flèche.

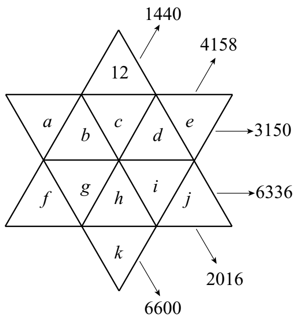


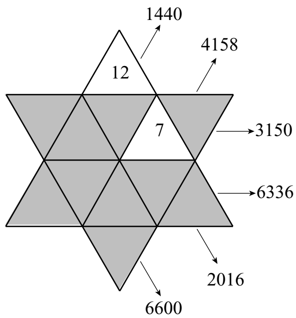
1) Quelle est la seule case qui peut contenir le nombre **7** ? Justifier la réponse.
2) Quelles sont les cases possibles pour les nombres **5** et **10** ? Justifier la réponse.
3) Placer les nombres **1** et **9**. Justifier la réponse.
4) Placer, sans justification, les autres nombres et reproduire l'étoile complétée sur la copie.

Solution (Paul-Louis Hennequin)

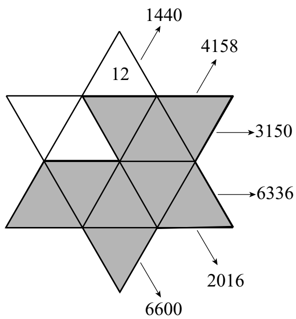
•Préliminaires

a) Nommons les 11 cases vides de a à k suivant la figure.
b) Décomposons en facteurs premiers les produits :
$1440 = 2^5 \times 3^2 \times 5$
$4158 = 2 \times 3^3 \times 7 \times 11$
$3150 = 2 \times 3^2 \times 5^2 \times 7$
$6336 = 2^6 \times 3^2 \times 11$
$2016 = 2^5 \times 3^2 \times 7$
$6000 = 2^3 \times 3 \times 5^2 \times 11.$

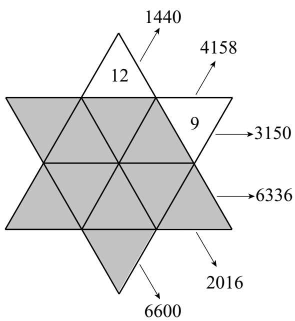




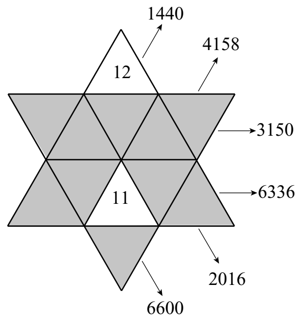
•1) 1440, 6336 et 6000 ne sont pas divisibles par 7 mais 2016 l'est. La seule case qui peut contenir 7 est d.



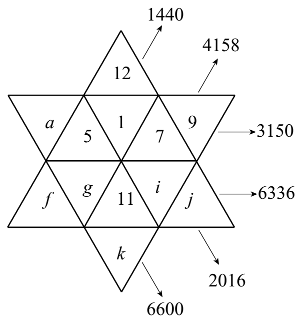
•2) 4158, 6336 et 2016 ne sont pas divisibles par 5 ; 5 et 10ne peuvent donc être placés qu'en a et b ou b et a.



•3) 6600 n'est pas divisible par 9, 1440 et 2016 ne sont pas divisibles par 27 et 12 est divisible par 3. Cela laisse e comme seule case possible pour 9 et 1 doit être placé en c.

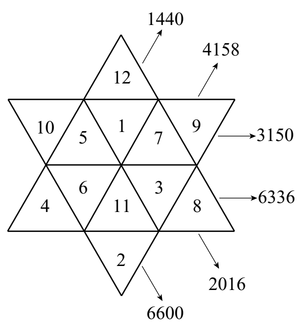


•4) 1440, 3150 et 2016 ne sont pas divisibles par 11, mais 6336 l'est. 11 doit donc être placé en h.



•5) Nous sommes donc arrivés à l'étape ci-contre en notant ℓ le contenu de la case ℓ.

$$
\begin{aligned}
(a)(b) &= 50 \\
(k)(i) &= \frac{4158}{7.9.11} = 6 \\
(k)(g) &= \frac{6600}{5.10.11} = 12 \\
(i)(j) &= \frac{2016}{7.12} = 24 \\
(f)(g) &= \frac{6336}{11.24} = 24 \\
(b)(f)(g) &= \frac{1440}{12} = 120
\end{aligned}
$$



d'où $(b) = 5$ et $(a) = 10$.
$(k)(i)(j) = 6(j) = 24(k)$ d'où $(j) = 4(k)$ et comme $2 \leqslant (k)$ et $(j) \leqslant 8$, $(k) = 2$ et $(j) = 8$.
$(k)(f)(g) = 12(f) = 24(k)$ d'où $(f) = 2(k) = 4$, $(g) = 6(i) = 3$.
On vérifie que la solution ci-contre convient et la suite des étapes établit l'unicité.

Solution (Henri Bareil)

1 PLACER 7

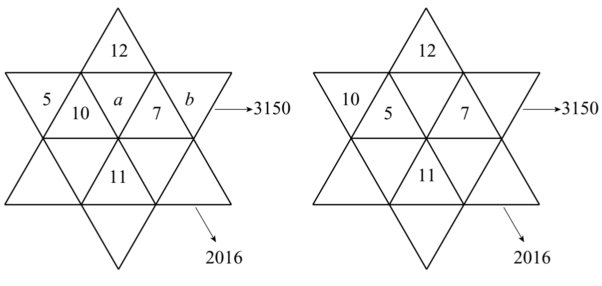
Comme 7 est premier, il faut et il suffit qu'il appartienne à toute travée dont le produit est divisible par 7. (Il n'en irait pas ainsi, comme condition nécessaire, pour un nombre non premier : 8, par exemple, peut très bien ne pas figurer dans une travée dont le prpoduit est divisible par 8. Cette divisibilité peut s'effectuer autrement qu'avec 8 grâce àç la présence, par exemple, de 12 et de 2, de 4 et de 2, de 10 et de 4, etc). Des dédcompositions bien choisies -ainsi $1440 = 1400 + 40$; 4158 = 4200 - 42 ; etc ;, permettent de répondre aisément en calcul mental à la divisibilité par 7.
Il émerge trois produits divisibles par 7. Ce sont 4158 ; 3150 ; 2016.
7 est à l'intersection des trois travées correspondantes.

Remarque :
La même méthode permet de placer 11, lui aussi premier, qui occupera la case intersection de trois travées possibles : celles de 4158 ; 6336 ; 6600.
Elle ne permet pas de placer le nombre premier 3. Une travée peut avoir son produit divisible par 3 sans que 3 y figure, pourvu qu'y figurent 6 ou 9 ou 12.
Quant à 5, Cf. ci-dessous.

2 PLACER 5 ET 10

Sans calculette (!), il apparaît immédiatement que trois produits sont divisibles par 5 et 10. Deux sont même divisibles par 5×10, l'autre pas. D'où deux possibilités, au moins pour l'instant.

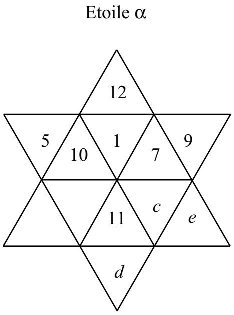
Etoile α Etoile β



3 PLACER 1 et 9

La tyravée la plus sympa est celle qui a trois cases garnies. Soit a et b les deux autres nombres.
$5 \times 10 \times 7 \times a \times b = 3150$ soit $350ab = 3150$ et $ab = 9$. Or $a \neq b$. D'où $a = 1$ et $b = 9$ ou $a = 9$ et $b = 1$.
Comme a figure dans la travée de produit 2016, a doit diviser 2016 : 84 soit 24.
Ceci exclut 9.
Donc $a = 1$ et $b = 9$.

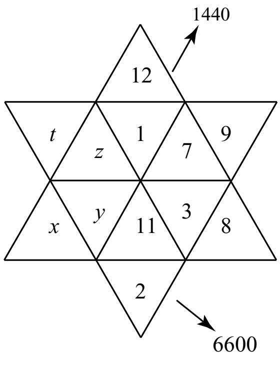
(4) Dès lors :



Considérons les cases c, d, e pour lesquelles il semble que nous ayons le maximum de renseignements.
En utilisant les produits correspondants :
$ce = 24$ Le nombre 12 étant déjà utilisé, il reste la possibilité $cd = 6$ d'où $c = 3$ et $e = 8$ (ou « à l'envers ») et $c = 4$ et $e = 6$ (ou à l'envers).
$c = 2$ et $d = 3$, ou à l 'envers.

Les deux conditions simultanées obligent à $c = 3$.
D'où $d = 2$ et $e = 8$.

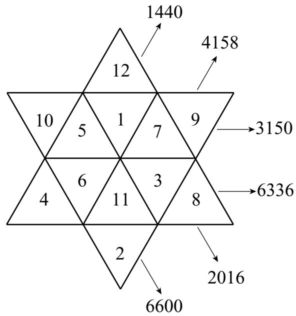
Dès lors, nous sommes sûrs de l'étoile ci-dessous :



avec un flottement entre les étoiles α et β pour 5 et 10. Mais dans les deux cas, $y = 600 : (50 \times 11 \times 2)$
$\boxed{y = 6}$.

Donc $xz = 1440 : (12 \times 6)$
$= 20$
puis $x = 2$ et $z = 10$ ou $x = 4$ et $z = 5$.
Le cas $x = 2$ est exclu, 2 étant déjà attribué.

Cela oblige au choix β et à la solution, unique, ci-dessous.



Palmarès

Série S
Premier prix : RAUCY Loïc - Lycée Fabert - METZ
Deuxième prix : JUAN Paul-Edouard - Lycée Georges de la Tour - METZ
Troisième prix : ROLIN Pierre - Lycée Fabert - METZ
WURTZ Damien - Lycée Louis Vincent - METZ.
Séries L - SE
Premier prix : NEYHOUSER Simon - Lycée Fabert - METZ
Séries STL-STI
Premier prix : BRANLY Edouard - Lycée Varoquaux - TOMBLAINE.