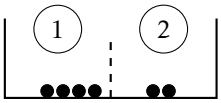
Exercice 1. Ramasse tes billes

Ramasse tes billes

Soient b et c deux entiers naturels non nuls.
On dispose de b **billes identiques**, ainsi que d'une boîte de rangement comportant c compartiments numérotés de 1 à c. Dans ce problème, on s'intéresse à la façon de ranger toutes ces billes dans les compartiments.

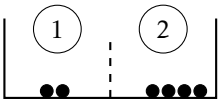
Première partie : Une modélisation

Dans cette partie, on modélise une façon de ranger les billes par la liste ordonnée (dans l'ordre de numérotation des compartiments) des effectifs de billes de chaque compartiment. Une telle liste est appelée **rangement**.



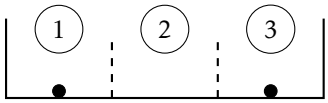
$(4;2)$

$(4;2)$ est un rangement de six billes ($b = 6$) dans deux compartiments ($c = 2$).



$(2;4)$

$(2;4)$ est un autre rangement de six billes ($b = 6$) dans deux compartiments ($c = 2$).



$(1;0;1)$

$(1;0;1)$ est un rangement de deux billes ($b = 2$) dans trois compartiments ($c = 3$).

$(4;2)$ est un rangement de six billes ($b = 6$) dans deux compartiments ($c = 2$).
$(2;4)$ est un autre rangement de six billes ($b = 6$) dans deux compartiments ($c = 2$).
$(1;0;1)$ est un rangement de deux billes ($b = 2$) dans trois compartiments ($c = 3$).
Enfin, on note $\mathrm{R}(b;c)$ le nombre de rangements possibles de b billes dans c compartiments.

Q1 : Commençons par étudier quelques cas particuliers

- **(a)** Dans cette question, on prend $b = 2$ et $c = 3$. Donner et illustrer tous les rangements possibles et en déduire $\mathrm{R}(2;3)$.
- **(b)** Dans cette question, on prend $b = c = 3$. Sans justifier, donner la valeur de $\mathrm{R}(3;3)$.
- **(c)** Que valent $\mathrm{R}(1;c)$ et $\mathrm{R}(b;1)$? Justifier.
- **(d)** Montrer que $\mathrm{R}(b;2) = b + 1$.

Q2 : Existe-t-il une valeur de b pour laquelle $\mathrm{R}(b;2025) < 2025$?

Q3 : Dans cette question, on suppose que $c \geq 2$.

- **(a)** Justifier l'égalité suivante :

$$\mathrm{R}(b;c) = 1 + \sum_{i=1}^{b} \mathrm{R}(i;c-1)$$

Autrement écrite :

$$\mathrm{R}(b;c) = 1 + \mathrm{R}(1;c-1) + \mathrm{R}(2;c-1) + \mathrm{R}(3;c-1) + \ldots + \mathrm{R}(b;c-1)$$

- **(b)** Recopier et compléter le tableau à double-entrée ci-dessous avec les valeurs de $\mathrm{R}(b;c)$.

	$c = 1$	$c = 2$	$c = 3$	$c = 4$	$c = 5$
$b = 1$	…	2	…	…	…
$b = 2$	…	3	…	…	…
$b = 3$	…	4	…	…	…
$b = 4$	…	5	…	…	…
$b = 5$	…	6	…	…	…

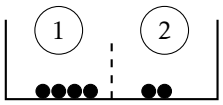
- **(c)** En observant le tableau de valeurs, compléter la conjecture suivante :

$$\mathrm{R}(b;c) + \mathrm{R}(b+1;c-1) = \ldots$$

Démontrer cette conjecture.

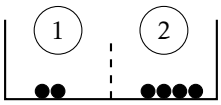
Deuxième partie : une autre modélisation

Dans cette partie, un rangement est désormais codé par un mot formé des lettres B (pour bille) et P (pour paroi), comme illustré ci-dessous.



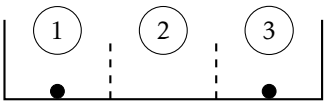
BBBBPBB

Le rangement de six billes ($b = 6$) dans deux compartiments ($c = 2$) ci-contre est codé par le mot BBBBPBB.



BBPBBBB

Un autre rangement de six billes ($b = 6$) dans deux compartiments ($c = 2$) ci-contre est codé par BBPBBBB.



BPPB

Un rangement de deux billes ($b = 2$) dans trois compartiments ($c = 3$) ci-contre est codé par BPPB.

De la même façon que dans la partie 1, $R(b; c)$ désigne le nombre de rangements de b billes dans c compartiments.

Q4 : Dans cette question, on prend $b = 2$ et $c = 3$. Écrire tous les mots codant les rangements possibles et retrouver la valeur de $R(2; 3)$ établie dans la partie 1.

Q5 : Dans cette question, on prend $b = 2$ et $c = 2025$. En considérant la façon de placer deux lettres B dans un mot, montrer que $R(2; 2025) = 2\,051\,325$.

Q6 : Le dual d'un mot est le mot obtenu en remplaçant B par P et inversement. Par exemple, le dual de BBPBBB est PPBPPP.

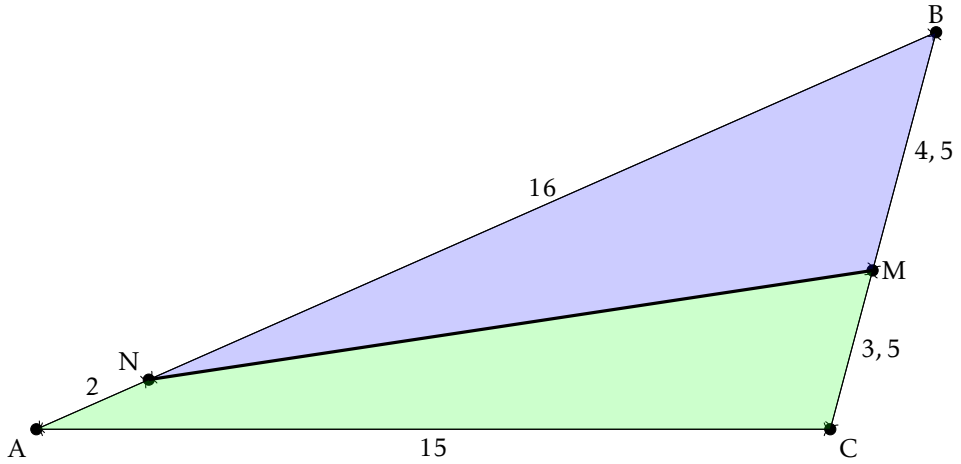
Quels nombres de billes et de compartiments le dual d'un rangement de $b = 2024$ billes dans $c = 3$ compartiments comporte-t-il ? En déduire $R(2024; 3)$.

Exercice 2. Coupure parfaite d'un triangle

Une unité de longueur arbitraire a été choisie.

Dire qu'un segment est une **coupure parfaite** d'un triangle signifie qu'il vérifie à la fois les deux conditions suivantes :

- les extrémités de ce segment appartiennent à des côtés du triangle (ce sont éventuellement des sommets du triangle) ;
- ce segment partage le triangle en deux polygones de même aire et même périmètre.

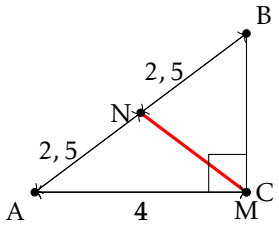


Par exemple, sur la figure ci-contre, le segment [MN] est une coupure parfaite du triangle ABC puisque l'on peut montrer que le triangle MBN et le quadrilatère ANMC ont à la fois la même aire et le même périmètre.
Le but du problème est d'établir que tout triangle possède au moins une coupure parfaite.

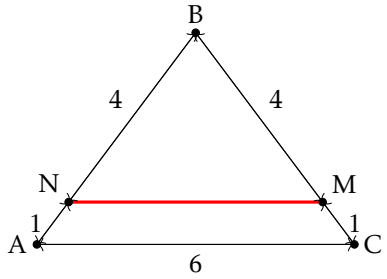
Première partie : questions préliminaires

Q1 : Dans chacun des cas suivants, déterminer si le segment [MN] est une coupure parfaite du triangle ABC.

Cas 1 (les points M et C sont confondus)



Cas 2



Q2 : Montrer que si un triangle est isocèle, alors il existe au moins une coupure parfaite de ce triangle.

Deuxième partie : un triangle particulier

Dans la suite du problème, on considère un triangle ABC. On note $a = \text{BC}$, $b = \text{AC}$ et $c = \text{AB}$.
Soient M et N deux points appartenant respectivement aux segments [CB] et [BA] ; on note :

$$m = \text{BM} \quad \text{et} \quad n = \text{BN}.$$

Pour les questions **3)** à **6)**, on prend $a = 8$, $b = 15$ et $c = 17$.

Q3 : Quelle est la nature du triangle ABC ?

Q4 : Exprimer l'aire du triangle MBN en fonction de m et n.

Q5 : Montrer que si [MN] est une coupure parfaite du triangle ABC alors :

$$mn = 68 \quad \text{et} \quad m + n = 20.$$

Q6 : En déduire le(s) couple(s) $(m; n)$ tel(s) que le segment [MN] soit une coupure parfaite du triangle ABC.
Pour la question **7)**, on prend $a = 15$, $b = 8$ et $c = 17$.

Q7 : Existe-t-il des couples $(m; n)$ tels que [MN] soit une coupure parfaite du triangle ABC ?

Troisième partie : cas général

Dans cette partie, on suppose que le triangle ABC est tel que : $0 < a < b < c$.

Q8 : Exprimer l'aire du triangle ABC en fonction de a, de c et du sinus de l'angle $\widehat{\text{ABC}}$.

Q9 : Montrer que si [MN] est une coupure parfaite du triangle ABC, alors m et n sont solutions de l'équation

$$2x^2 - (a + b + c)x + ac = 0.$$

Q10 : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - (a + b + c)x + ac$.
Déterminer le signe de chacune des trois images $f(0)$, $f(a)$ et $f(c)$.

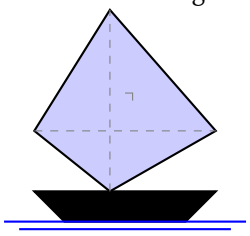
Q11 : On admettra le théorème suivant (théorème des valeurs intermédiaires)

> Si f est une fonction polynomiale et s'il existe deux réels u et v tels que $f(u) > 0$ et $f(v) < 0$ alors f admet au moins une racine sur l'intervalle $]u; v[$

Déduire de la question précédente que le triangle ABC admet au moins une coupure parfaite.

Exercice 3. Dans le vent

Une unité de longueur arbitraire a été choisie.



> On appelle **voile** tout quadrilatère non croisé dont les **diagonales sont perpendiculaires et de longueur 1**.
> On appelle **centre** d'une voile le point d'intersection de ses diagonales.

Première partie : questions introductives

1) Que peut-on dire d'une voile dont le centre est le milieu des diagonales ? Déterminer l'aire et le périmètre d'une telle voile.

2) Montrer que toutes les voiles ont la même aire.

Deuxième partie : optimisation de la somme des carrés des longueurs des côtés

Dans cette partie, on considère une voile ABCD de centre O et on note S la somme des carrés des longueurs de ses côtés :

$$S = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2.$$

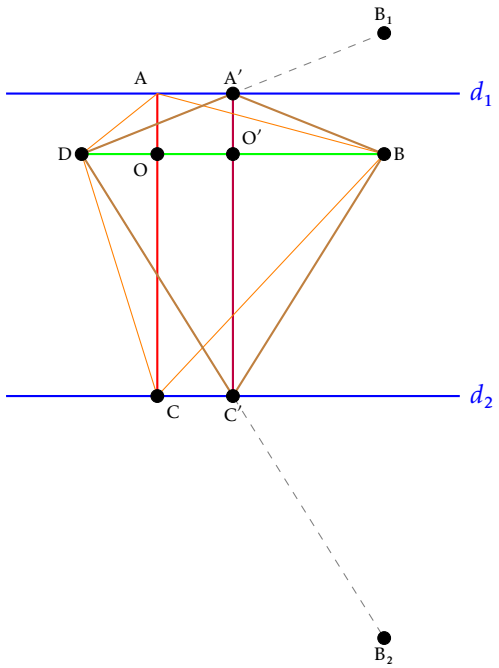
On note $x = OA$ et $y = OB$.

3) Déterminer une expression de S en fonction de x et y, puis vérifier que :

$$S = 4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 4\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + 2.$$

4) En déduire la valeur minimale de S. Quelles sont les voiles pour lesquelles cette valeur minimale est atteinte ?

Troisième partie : optimisation du périmètre



Dans cette partie, on considère une voile ABCD de centre O, dont on note P le périmètre. On note d_1 et d_2 les droites parallèles à la droite (DB) passant respectivement par les points A et C.
On note B_1 le symétrique du point B par rapport à la droite d_1 et B_2 le symétrique du point B par rapport à la droite d_2.
Enfin, on note A′ le point d'intersection des droites (DB_1) et d_1, C′ le point d'intersection des droites (DB_2) et d_2 et O′ le point d'intersection des droites (A′C′) et (DB).

5) Montrer que $DA + AB \geqslant DA' + A'B$ et en déduire que P est supérieur ou égal au périmètre du quadrilatère A′BC′D.

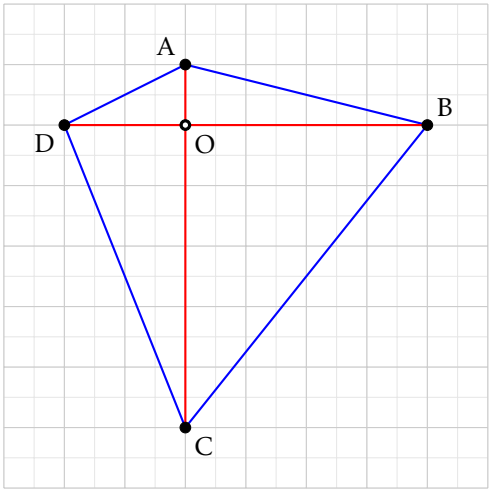
6) Montrer que le quadrilatère A′BC′D est une voile. Justifier que son centre O′ est le milieu du segment [DB].

7) Montrer que $\dfrac{OA'}{OC'} = \dfrac{OA}{OC}$.

Le quadrilatère A′BC′D est appelé le **quadrilatère rectifié** de ABCD parallèlement à la diagonale (DB).

On considère maintenant le quadrilatère A′B′C′D′ rectifié de A′BC′D parallèlement à la diagonale (A′C′), c'est-à-dire le quadrilatère obtenu selon le procédé décrit précédemment, mais appliqué à A′BC′D et en considérant des parallèles à (A′C′).

8) Reproduire la figure ci-dessous et construire le quadrilatère A′B′C′D′.



9) Quelle est la nature du quadrilatère A′B′C′D′ ? Justifier.

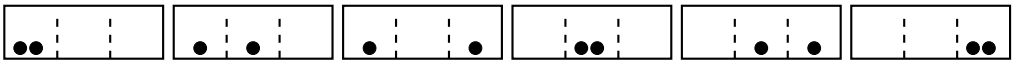
10) Déterminer la valeur minimale de P.

Corrigé de l'exercice 1 : Ramasse tes billes

Première Partie

Q1 : Des cas particuliers :

a) On prend ici $b = 2$ (deux billes) et $c = 3$ (trois compartiments) :



$(2,0,0)$ $(1,1,0)$ $(1,0,1)$ $(0,2,0)$ $(0,1,1)$ $(0,0,2)$

En choisissant une case pour 2 billes, on a 3 possibilités, puis 1 case pour 0 billes et 1 dans chaque autre on a aussi 3 possibilités, soit 6 rangements possibles donc $R(2;3) = 6$.

b) On choisit une case pour 2 billes (3 possibilités) puis 1 case pour la bille restante (2 possibilités) soit 6 possibilités. Il faut ajouter le cas où il y a une bille par case, et les 3 cas où il y 3 billes dans une case. En listant toutes ces possibilités, on trouve $R(3;3) = 10$.

c) Le calcul de $R(1;c)$ revient à placer 1 bille dans c compartiments. Il y a donc c possibilités et $R(1;c) = c$.
Le calcul $R(b;1)$ revient à placer b billes dans un seul compartiment, il y a donc une seule possibilité et $R(b;1) = 1$.

d) Pour calculer $R(b;2)$, on peut choisir le nombre de billes à placer dans le premier compartiment (de 0 à b soit $b+1$ possibilités), le reste est donc dans le deuxième.
On peut donc en déduire que $R(b;2) = b+1$.

Q2 : D'après la question 1)c), on a $R(1;2025) = 2025$. Si on considère le placement de toutes les billes dans le même compartiment, on peut en déduire que la valeur de $R(1;2025)$ est inférieure à $R(b;2025)$. Il n'y a donc pas de valeur de b telle que $R(b;2025) < 2025$.

Q3 : On pose $c \geqslant 2$.

a) On considère le rangement de b billes dans c compartiments. Pour cela, on peut choisir le nombre i de billes dans les $(c-1)$ premiers compartiments. Soit $i = 0$ à b et donc $R(i, c-1)$ façons de les placer sauf pour le cas $i = 0$ où il y a une seule façon de faire puisqu'aucune bille n'est à placer. On place ensuite les billes restantes dans le dernier compartiment.
Ainsi :

$$R(b;c) = 1 + \sum_{i=1}^{b} R(i;c-1)$$

b) Pour compléter le tableau, on utilise :

- La question 1)c) pour remplir la première colonne et la première ligne.
- La formule précédente : chaque case est égale à 1 plus la somme des cases dans la colonne juste à gauche jusqu'à la hauteur de la case en question.

	$c=1$	$c=2$	$c=3$	$c=4$	$c=5$
$b=1$	1	2	3	4	5
$b=2$	1	3	6	10	15
$b=3$	1	4	10	20	35
$b=4$	1	5	15	35	70
$b=5$	1	6	21	56	126

c) On peut remarquer que la case que l'on complète $R(b+1;c)$ est égale à la somme de deux cases, une au-dessus $R(b;c-1)$ et une à gauche $R(b;c)$.
On peut donc conjecturer que

$$R(b;c) + R(b+1;c-1) = R(b+1;c)$$

Pour le démontrer on s'appuie sur la formule obtenue à la question 3)a) :

$$\begin{aligned}
\mathrm{R}(b;c)+\mathrm{R}(b+1;c-1) &= 1+\sum_{i=1}^{b}\mathrm{R}(i;c-1)+\mathrm{R}(b+1;c-1)\\
&= 1+\sum_{i=1}^{b+1}\mathrm{R}(i;c-1)\\
&= \mathrm{R}(b+1;c)
\end{aligned}$$

Deuxième Partie

Q4 : Avec $b=2$ et $c=3$, il nous faut créer des mots avec 2 B et 2 P.
On peut faire les mots suivants : BBPP, BPBP, BPPB, PBBP, PBPB, PPBB. De nouveau $\mathrm{R}(2;3)=6$.

Q5 : On doit donc considérer des mots constitués de 2026 lettres, $b=2$ donc 2 lettres B et $c=2025$ donc 2024 lettres P. On doit donc ensuite placer les deux lettres B, le reste sera donc rempli par la lettre P.
Choix de 2 positions parmi 2026, ainsi $\mathrm{R}(2;2025)=\binom{2026}{2}=\dfrac{2026\times 2025}{2}=2\,051\,325$.

Q6 : Le dual du rangement avec $b=2024$ et $c=3$ contient 2024 lettres P et 2 lettres B. Il correspond donc à $b=2$ et $c=2025$.
On peut donc en déduire que :

$$\mathrm{R}(2024;3)=\mathrm{R}(2;2025)=2\,051\,325$$

Corrigé de l'exercice 2 : Coupure parfaite d'un triangle

Première Partie : Questions préliminaires

1) Dans chacun des cas suivants, déterminer si le segment [MN] **est une coupure parfaite du triangle** ABC **:**

a) **Cas 1 :**
Le triangle ABC est rectangle en C. D'après le théorème de Pythagore :

$$\mathrm{BC}^2=\mathrm{AB}^2-\mathrm{AC}^2=5^2-4^2=9$$

On a donc BC = 3 unités.

Les périmètres ne sont pas égaux puisque :

$$\mathrm{P}_{\mathrm{ANC}}=4+2.5+\mathrm{MN}\quad\text{et}\ \mathrm{P}_{\mathrm{BCN}}=3+2.5+\mathrm{MN}$$

La coupure proposée n'est pas parfaite.

b) **Cas 2 :**
Les rapports $\dfrac{\mathrm{BN}}{\mathrm{BA}}$ et $\dfrac{\mathrm{BM}}{\mathrm{BC}}$ sont égaux à $\dfrac{4}{5}$. Les points B, N, A et B, M, C sont alignés dans le même ordre, d'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (NM) et (AC) sont parallèles.
L'aire du triangle BNM mesure donc $\left(\dfrac{4}{5}\right)^2=\dfrac{16}{25}$ de l'aire du triangle ABC. Cette aire n'est donc pas égale à l'aire du quadrilatère ANMC qui représente lui le reste soit $\dfrac{9}{25}$ de l'aire du triangle ABC.
La coupure proposée n'est pas parfaite.

2) Supposons que le triangle ABC soit isocèle en A. On peut prendre M = A et N milieu du segment [BC] ainsi [AN] est aussi la hauteur issue de A.
Par symétrie, les deux triangles ABN et ACN ainsi obtenus ont même aire et même périmètre.
Le segment [MN] est donc une coupure parfaite. Tout triangle isocèle possède au moins une coupure parfaite.

Deuxième partie : Un triangle particulier

Pour les questions 3) à 6), on prend $a=\mathrm{BC}=8$, $b=\mathrm{AC}=15$, $c=\mathrm{AB}=17$.

3) Vérifions l'égalité de Pythagore :

$$15^2+8^2=225+64=289=17^2$$

L'égalité de Pythagore est vérifiée, donc le triangle ABC est rectangle en C.

4) Dans le triangle MBN, la hauteur issue de M sur [BN] est perpendiculaire à (BN) et donc parallèle à (AC). Soit h sa longueur. Par le théorème de Thalès dans les triangles semblables BMN et BAC, on a :

$$\frac{h}{b} = \frac{n}{c} \quad \text{soit} \quad h = \frac{bn}{c} = \frac{15n}{17}$$

L'aire du triangle MBN est donc :

$$\mathcal{A}_{\text{MBN}} = \frac{1}{2} \times m \times h = \frac{1}{2} \times m \times \frac{15n}{17} = \frac{15mn}{34}$$

5) Si [MN] est une coupure parfaite, alors : $\text{P}_{\text{MBN}} = \text{P}_{\text{ANMC}}$
Soit :

$$m + n + \text{MN} = (17 - n) + \text{MN} + (8 - m) + 15$$

$$m + n = 40 - m - n$$

$$2m + 2n = 40$$

$$m + n = 20$$

Égalité des aires :

$$\mathcal{A}_{\text{MBN}} = \frac{1}{2}\mathcal{A}_{\text{ABC}}$$

L'aire du triangle ABC (rectangle en C) est :

$$\mathcal{A}_{\text{ABC}} = \frac{1}{2} \times 8 \times 15 = 60$$

Donc :

$$\frac{15mn}{34} = \frac{60}{2} = 30$$

$$15mn = 30 \times 34 = 1020$$

$$mn = \frac{1020}{15} = 68$$

6) On a le système :

$$\begin{cases} m + n = 20 \\ mn = 68 \end{cases}$$

De $m + n = 20$, on tire $m = 20 - n$. En substituant dans la deuxième équation :

$$(20 - n)n = 68$$

$$20n - n^2 = 68$$

$$n^2 - 20n + 68 = 0$$

Le discriminant de cette équation est :

$$\Delta = (-20)^2 - 4 \times 1 \times 68 = 400 - 272 = 128 > 0$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{128} = 8\sqrt{2}$$

Les solutions sont :

$$n_1 = \frac{20 + 8\sqrt{2}}{2} = 10 + 4\sqrt{2} \quad \text{et} \quad n_2 = \frac{20 - 8\sqrt{2}}{2} = 10 - 4\sqrt{2}$$

Les valeurs correspondantes de m sont :

$$m_1 = 20 - n_1 = 10 - 4\sqrt{2} \quad \text{et} \quad m_2 = 20 - n_2 = 10 + 4\sqrt{2}$$

Puisque M appartient à [BC] avec BC = 8, on doit avoir $m \leqslant 8$. Seul $m_1 = 10 - 4\sqrt{2} \approx 4.34$ vérifie cette condition.
Le seul couple possible est donc :

$$(m, n) = (10 - 4\sqrt{2}, 10 + 4\sqrt{2})$$

7) Pour cette question, on prend $a = 15$, $b = 8$, $c = 17$. Le triangle est toujours rectangle en C (car $8^2 + 15^2 = 17^2$), mais maintenant $a = 15$, $b = 8$.
En refaisant le même raisonnement, on obtient :

$$m + n = 20 \quad \text{(même calcul pour les périmètres)}$$

$$\mathcal{A}_{\text{MBN}} = \frac{8mn}{34} \quad \text{et} \quad \mathcal{A}_{\text{ABC}} = \frac{1}{2} \times 15 \times 8 = 60$$

Pour une coupure parfaite :

$$\frac{8mn}{34} = 30 \quad \Rightarrow \quad mn = \frac{30 \times 34}{8} = \frac{1020}{8} = 127.5$$

Le système devient :

$$\begin{cases} m + n = 20 \\ mn = 127,5 \end{cases}$$

L'équation du second degré est :

$$n^2 - 20n + 127,5 = 0$$

Son discriminant est :

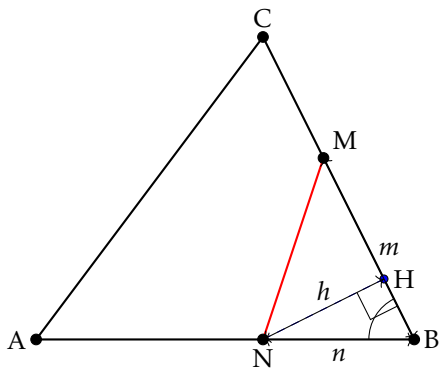
$$\Delta = 400 - 4 \times 127,5 = 400 - 510 = -110 < 0$$

Le discriminant étant négatif, il n'y a pas de solution réelle. Il n'existe donc pas de coupure parfaite dans cette configuration.

Troisième partie : Cas général

Dans cette partie, on suppose que le triangle ABC est tel que : $0 < a < b < c$, avec $a = \text{BC}$, $b = \text{AC}$, $c = \text{AB}$.

8)



Dans le triangle BNM, la longueur de la hauteur issue de N est $h = \text{NH}$
Par trigonométrie dans le triangle BHN rectangle en H, on a $h = n \times \sin(\widehat{\text{ABC}})$ et donc l'aire du triangle BNM :

$$\text{A}_{\text{BNM}} = \frac{nm \sin(\widehat{\text{ABC}})}{2}$$

9) Si [MN] est une coupure parfaite :

(a) Égalité des périmètres :

$$m + n + \text{MN} = (c - n) + \text{MN} + (a - m) + b$$
$$m + n = c - n + a - m + b$$
$$2m + 2n = a + b + c$$
$$m + n = \frac{a + b + c}{2}$$

(b) Égalité des aires : l'aire du triangle MBN est :

$$\mathcal{A}_{\text{MBN}} = \frac{1}{2} \times m \times n \times \sin \widehat{\text{ABC}}$$

Et elle doit être égale à la moitié de l'aire de ABC qui vaut

$$\mathcal{A}_{\text{ABC}} = \frac{1}{2} \times \text{AB} \times \text{BC} \times \sin(\widehat{\text{ABC}}) = \frac{ac \sin \widehat{\text{ABC}}}{2}$$

En supposant $\sin \widehat{\text{ABC}} \neq 0$ (triangle non dégénéré) on obtient :

$$mn = \frac{ac}{2}$$

Des équations $m + n = \dfrac{a + b + c}{2}$ et $mn = \dfrac{ac}{2}$, on déduit que m et n sont solutions de :

$$x^2 - \left(\frac{a + b + c}{2}\right)x + \frac{ac}{2} = 0$$

En multipliant par 2 :

$$2x^2 - (a + b + c)x + ac = 0$$

10) Calculons :

$$f(0) = 2\times 0^2 - (a+b+c)\times 0 + ac = ac > 0 \quad (\text{car } a>0, c>0)$$
$$f(a) = 2a^2 - (a+b+c)a + ac = 2a^2 - a^2 - ab - ac + ac = a^2 - ab = a(a-b) < 0 \ (\text{car } a>0 \text{ et } a<b)$$
$$f(c) = 2c^2 - (a+b+c)c + ac = 2c^2 - ac - bc - c^2 + ac = c^2 - bc = c(c-b) > 0 \ (\text{car } c>0 \text{ et } c>b)$$

11) La fonction f est une fonction polynôme du second degré, donc continue sur $\mathbb{R}$.
On a montré que : $f(0) > 0$, $f(a) < 0$ et $f(c) > 0$
D'après le théorème des valeurs intermédiaires appliqué deux fois :
(a) Sur $[0,a]$: $f(0) > 0$ et $f(a) < 0$, donc f s'annule en un point $x_1 \in]0,a[$.
(b) Sur $[a,c]$: $f(a) < 0$ et $f(c) > 0$, donc f s'annule en un point $x_2 \in]a,c[$.
Ces deux racines x_1 et x_2 sont les valeurs possibles pour m et n. Puisque $x_1 \in]0,a[$, c'est une valeur admissible pour m (car $m \in [0,a]$). Puisque $x_2 \in]a,c[$, c'est une valeur admissible pour n (car $n \in [0,c]$).
Ces valeurs vérifient $m+n = \dfrac{a+b+c}{2}$ et $mn = \dfrac{ac}{2}$, donc définissent une coupure parfaite.
Ainsi, tout triangle ABC admet au moins une coupure parfaite.

Corrigé de l'exercice 3 : Dans le vent

Première partie

Q1 : Si le centre de la voile est le milieu des diagonales, alors la voile est un parallélogramme. De plus, avec des diagonales perpendiculaires, c'est un losange. Comme elles sont de même longueur (égale à 1), c'est un carré.
On peut calculer le côté du carré en utilisant le théorème de Pythagore dans un triangle rectangle isocèle de côtés $\dfrac{1}{2}$:

$$c^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \quad \text{donc} \quad c = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

On a alors :

$$\text{Périmètre} = 4\times\frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}, \qquad \text{Aire} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}.$$

Q2 : Toute voile peut être inscrite dans un carré de côté 1 dont les côtés sont parallèles aux diagonales de la voile. Les quatre triangles formant la voile sont alors dupliqués dans le carré, donc :

$$\mathrm{A}_{\text{voile}} = \frac{1}{2}\times 1 = \frac{1}{2}.$$

Toutes les voiles ont donc la même aire $\dfrac{1}{2}$.

Deuxième partie

Q3 : On a $x = \mathrm{OA}$, $y = \mathrm{OB}$, $\mathrm{OC} = 1-x$, $\mathrm{OD} = 1-y$.
En appliquant le théorème de Pythagore dans les triangles rectangles AOB, BOC, COD et DOA, on obtient :

$$\mathrm{AB}^2 = x^2+y^2, \quad \mathrm{BC}^2 = y^2+(1-x)^2, \quad \mathrm{CD}^2 = (1-x)^2+(1-y)^2, \quad \mathrm{DA}^2 = (1-y)^2+x^2.$$

D'où :

$$\mathrm{S} = 2x^2+2y^2+2(1-x)^2+2(1-y)^2.$$

Développons :

$$\begin{aligned}\mathrm{S} &= 2x^2+2y^2+2(1-2x+x^2)+2(1-2y+y^2)\\ &= 4x^2+4y^2-4x-4y+4.\end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+4\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+2 &= 4\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)+4\left(y^2-y+\frac{1}{4}\right)+2\\ &= 4x^2-4x+1+4y^2-4y+1+2\\ &= 4x^2+4y^2-4x-4y+4.\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathrm{S} = 4\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+4\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2+2$.

Q4 : Les termes $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2$ et $\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2$ étant positifs, S est minimale lorsqu'ils sont nuls, c'est-à-dire lorsque $x = y = \dfrac{1}{2}$.
Alors $\mathrm{S}_{\min} = 2$.
Dans ce cas, O est le milieu des diagonales, donc la voile est un carré (cf. question 1).

Troisième partie

Q5 : Par construction, d_1 est la médiatrice de $[BB_1]$, donc $AB = AB_1$ et $A'B = A'B_1$.
Dans le triangle DAB_1, l'inégalité triangulaire donne :

$$DA + AB_1 \geqslant DB_1.$$

Or $DB_1 = DA' + A'B_1 = DA' + A'B$.
Ainsi, $DA + AB \geqslant DA' + A'B$.
De même, en considérant le triangle DCB_2, on obtient $DC + CB \geqslant DC' + C'B$.
En ajoutant ces deux inégalités, on obtient :

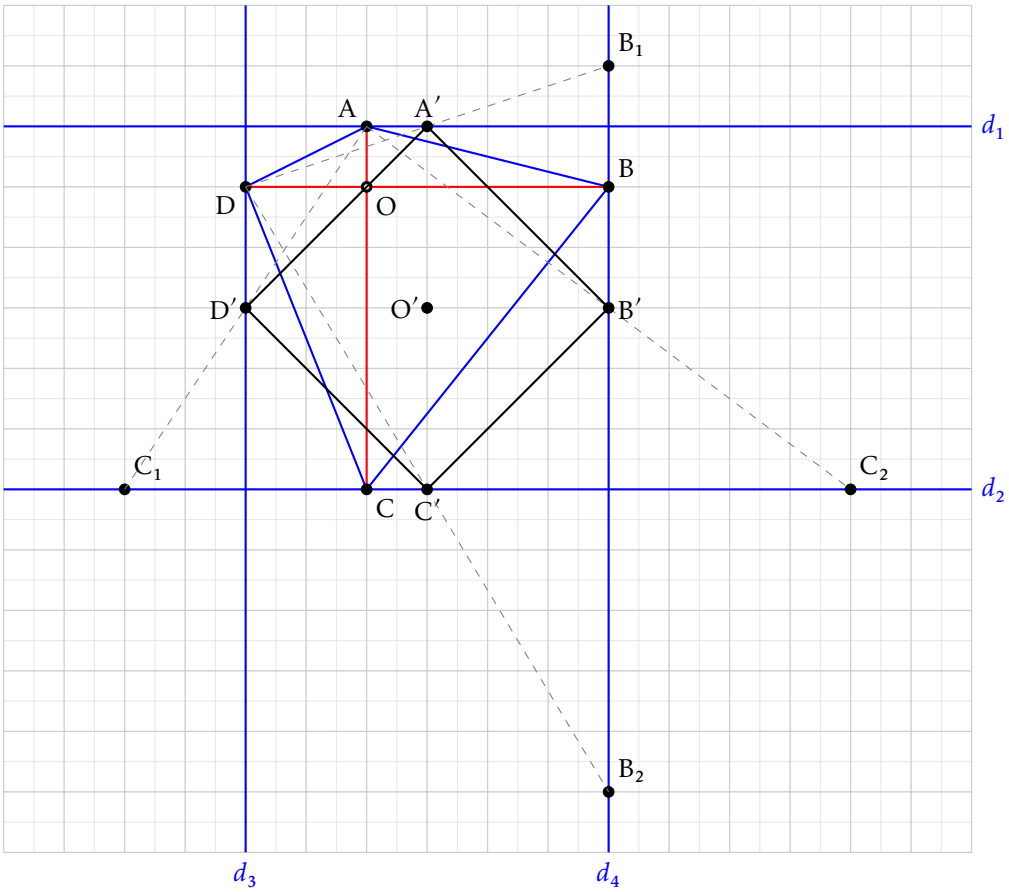
$$P = DA + AB + DC + CB \geqslant DA' + A'B + DC' + C'B = P_{A'BC'D}.$$

Q6 : d_1 est médiatrice de $[BB_1]$, donc A', intersection de d_1 et $[DB_1]$, est le milieu de $[DB_1]$. Ainsi $DA' = A'B_1 = A'B$.
De même, d_2 est médiatrice de $[BB_2]$, donc C' est le milieu de $[DB_2]$ et $DC' = C'B_2 = C'B$.
Par conséquent, $(A'C')$ est la médiatrice de $[DB]$, donc $(A'C') \perp (DB)$ et O', intersection de $(A'C')$ et (DB), est le milieu de $[DB]$.
De plus, $(A'C')$ est parallèle à (AC) (toutes deux perpendiculaires à (DB)), et la distance entre d_1 et d_2 est égale à $AC = 1$, donc $A'C' = 1$.
Ainsi, $A'BC'D$ est un quadrilatère non croisé dont les diagonales $(A'C')$ et (DB) sont perpendiculaires et de longueur 1 : c'est une voile, de centre O'.

Q7 : Les quadrilatères $AA'O'O$ et $CC'O'O$ sont des rectangles (car $(AA') \parallel (OO') \parallel (CC')$ et $(A'O') \parallel (AO)$, $(C'O') \parallel (CO)$).
Donc $OA = O'A'$ et $OC = O'C'$. Ainsi :

$$\frac{OA'}{OC'} = \frac{OA}{OC}.$$

Q8 : Figure : le quadrilatère $A'B'C'D'$ s'obtient en appliquant la construction précédente à la voile $A'BC'D$, en prenant cette fois les parallèles à $(A'C')$ passant par B et D.



Q9 : En appliquant le raisonnement de la question 6 à la voile $A'BC'D$, on obtient que $A'B'C'D'$ est une voile dont le centre O'' est le milieu de $[A'C']$ et aussi le milieu de $[B'D']$ (car la construction est symétrique).
Donc O'' est le milieu des deux diagonales : $A'B'C'D'$ est un carré (voir question 1).

Q10 : D'après la question 5 appliquée deux fois :

$$P_{ABCD} \geqslant P_{A'BC'D} \geqslant P_{A'B'C'D'}.$$

Or $A'B'C'D'$ est un carré de diagonales de longueur 1, donc son côté est $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et son périmètre vaut $2\sqrt{2}$.
Ainsi, la valeur minimale du périmètre P est $2\sqrt{2}$, atteinte lorsque ABCD est un carré.