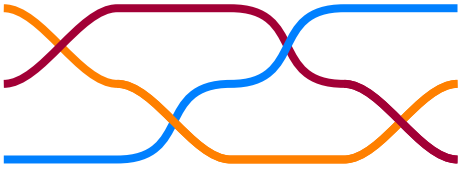
Exercice 1. Tresses mathématiques

Une tresse, en mathématiques, c'est une suite de croisements entre plusieurs brins.

Tresse à 1 brin

Tresse à 2 brins

Tresse à 3 brins



Nous allons explorer le monde des tresses mathématiques et voir que l'on peut s'en servir pour faire des calculs.

Partie 1 : Calculer avec des tresses

Dans cette partie, on considérera des tresses à 2 brins.
Notons 0 la tresse sans croisement et 1 la tresse où le brin du bas passe sous le brin du haut.
Pour définir la somme de deux tresses, il suffit de considérer chacune d'entre elles comme une boîte avec deux brins en entrée et deux brins en sortie. Les ajouter est simplement défini comme les mettre bout à bout. On notera $\oplus$ cette opération sur les tresses.
En ajoutant les tresses 0 et 1, on obtient une tresse qui est la même que la tresse 1. On retrouve ainsi la fameuse égalité : $0 \oplus 1 = 1$.

0 1 $0 \oplus 1$ 1

Q1 : En procédant comme ci-dessus, effectuer le calcul $1 \oplus 1$ et dessiner la tresse correspondant au nombre 2.

Q2 : Tracer la tresse correspondant au nombre 5.

Q3 : Expliquer comment décrire en français la tresse correspondant au nombre entier n.

L'opposé d'une tresse, noté avec un signe moins devant, est la tresse qui est son image par une symétrie d'axe vertical. Par exemple, on note -1 la tresse où le brin du bas passe sur celui du haut (c'est la tresse qui est l'image de la tresse 1 par une symétrie d'axe vertical).

1

On **démêle** une tresse en déplaçant des brins, sans les autoriser à se traverser, ni décrocher leurs extrémités.

Effectuons, avec des tresses, l'addition $1 \oplus (-1)$.
En démêlant les brins, comme nous pourrions le faire avec des cordes, on constate que l'on retrouve la tresse 0.

$1 \oplus (-1)$ 0

Q4 : Effectuer, en dessinant des tresses, l'addition $1 \oplus 1 \oplus (-1)$. Détailler le « démêlage » puis donner le résultat de l'addition à l'aide de la tresse simplifiée au maximum.

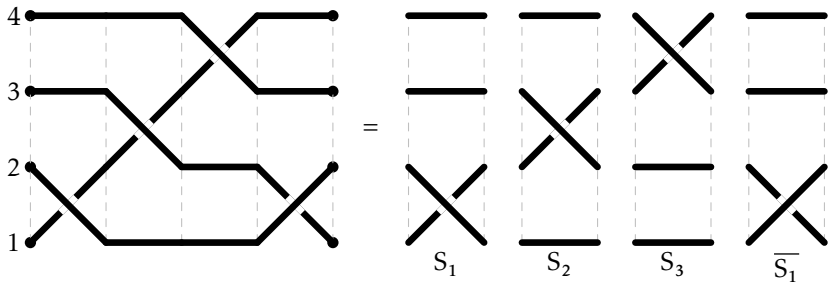
Q5 : Effectuer, en dessinant des tresses, l'addition $1 \oplus (-2) \oplus 3$. Détailler le « démêlage » puis donner le résultat de l'addition à l'aide de la tresse simplifiée au maximum.

Q6 : Effectuer, en dessinant des tresses, l'addition $4 \oplus (-5)$. Détailler le « démêlage » puis donner le résultat à l'aide de la tresse simplifiée au maximum.

Partie 2 : Codage des tresses

Dans cette partie, on augmente le nombre de brins.
On numérote les brins de la tresse de bas en haut de 1 à n.
Il est possible de décomposer un diagramme de tresse en une série de diagrammes de tresses élémentaires. Dans l'exemple ci-dessous, le diagramme de gauche est décomposé en une série de 4 diagrammes élémentaires à droite.

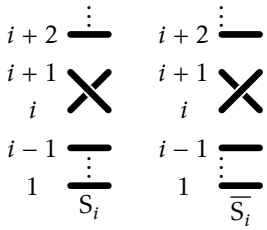
Ensuite, utilisons un codage pour représenter les tresses.
On note S_1 la tresse élémentaire où les brins 1 et 2 se croisent, le brin 1 passant sous le brin 2.
On note $\overline{S_1}$ la tresse élémentaire où les brins 1 et 2 se croisent, le brin 2 passant sous le brin 1.
De la même manière S_2 sera la tresse élémentaire où les brins 2 et 3 se croisent, le brin 2 passant sous le brin 3.



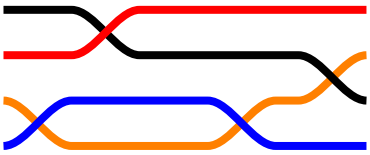
Ainsi la tresse de gauche se note : $S_1 \oplus S_2 \oplus S_3 \oplus \overline{S_1}$, le symbole $\oplus$ signifiant que l'on met bout à bout les tresses élémentaires.

Plus généralement :

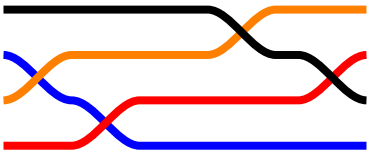
- On note S_i la tresse élémentaire où les brins i et $i+1$ se croisent, le brin i passant **sous** le brin $i+1$.
- On note $\overline{S_i}$ la tresse élémentaire où les brins i et $i+1$ se croisent, le brin i passant **au-dessus** du brin $i+1$.



Q1 : Montrer que la tresse de la figure ci-dessous, se code sous la forme $\overline{S_1} \oplus \overline{S_3} \oplus S_1 \oplus S_2$.



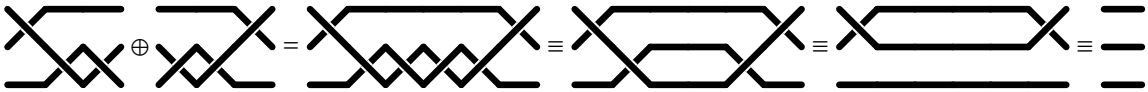
Q2 : Quel est le codage de la tresse de la figure ci-dessous ?



Q3 : Dessiner la tresse à 4 brins codée par $S_3 \oplus S_2 \oplus \overline{S_2} \oplus \overline{S_1}$.

Partie 3 : Démêlage

Deux diagrammes sont **équivalents** lorsqu'on obtient l'un à partir de l'autre en déplaçant des brins, sans les autoriser à se traverser, ni décrocher leurs extrémités.
On emploiera le signe $\equiv$ entre deux diagrammes équivalents.



Q1 : Prouver que $S_1 \oplus S_2$ et $S_2 \oplus S_1$ ne sont pas équivalents, on pourra illustrer par un schéma.
Q2 : Donner une tresse équivalente à $S_1 \oplus \overline{S_1}$.
Q3 : De même, trouver une tresse équivalente à $\overline{S_1} \oplus S_1$.
Q4 : En déduire, par une série de calculs, une tresse plus simple équivalente à

$$\overline{S_1} \oplus S_1 \oplus S_2 \oplus S_3 \oplus \overline{S_3}.$$

On admet le théorème suivant (Théorème d'Artin).

- Règle 1 : $S_i \oplus \overline{S_i} = \overline{S_i} \oplus S_i = 0$ pour tout entier i.
- Règle 2 : $S_i \oplus S_j = S_j \oplus S_i$ pour tous les entiers i et j d'écart strictement supérieur à 1.
- Règle 3 : $S_i \oplus S_j \oplus S_i = S_j \oplus S_i \oplus S_j$ pour tous les entiers i et j dont l'écart vaut 1.

Q5 : Justifier chaque passage d'une tresse équivalente à l'autre en donnant la ou les règle(s) utilisées à chaque étape.

$$S_1 \oplus S_2 \oplus \overline{S_1} = \overline{S_2} \oplus S_2 \oplus S_1 \oplus S_2 \oplus \overline{S_1} = \overline{S_2} \oplus S_1 \oplus S_2 \oplus S_1 \oplus \overline{S_1} = \overline{S_2} \oplus S_1 \oplus S_2$$

Q6 : En utilisant un raisonnement similaire, prouver que :

$$\overline{S_1} \oplus S_2 \oplus S_1 = S_2 \oplus S_1 \oplus \overline{S_2}$$

Q7 : Prouver que $S_1 \oplus S_3 \oplus \overline{S_1} = S_3$, illustrer avec un diagramme de tresses à 4 brins.

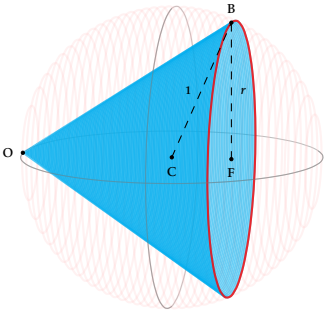
Q8 : Prouver que

$$S_1 \oplus S_2 \oplus S_3 \oplus S_1 \oplus S_2 \oplus S_1 = S_3 \oplus S_1 \oplus S_2 \oplus S_3 \oplus S_1 \oplus S_2.$$

Exercice 2. Cône incrit dans une sphère

Partie A

Soit C un point de l'espace. On considère la sphère de centre C et de rayon 1 ainsi que O, un point de cette sphère.
On considère dans cette partie l'ensemble E des cônes de sommet O et d'axe (OC) inscrits dans la sphère et l'on cherche le ou les cônes de cet ensemble de volume maximal. Dans l'illustration ci-dessous, le point F est le centre du disque de la base du cône et le point B est un point du cercle de la base du cône (et donc un point de la sphère).



$$OC = 1, \quad OF = h, \quad BF = r$$

On pourra utiliser le résultat suivant : Le volume V d'un cône de hauteur h et de base un disque d'aire A est :

$$V = \frac{1}{3}Ah.$$

Q1 : Camille et Dominique pensent chacun avoir trouvé la réponse :

Camille pense que le volume maximal est atteint lorsque $h = 1$ et Dominique pense que c'est lorsque $h = \frac{3}{2}$.

(a) Calculer le volume du cône dans ces deux cas particuliers.

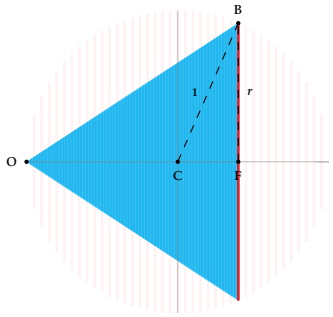
(b) Qui de Camille ou Dominique a nécessairement tort ?

Q2 : Soit Γ un cône de l'ensemble E. On note respectivement par h et r la hauteur et le rayon du disque de la base de Γ.

(a) Préciser l'intervalle I auquel h appartient.

(b) Exprimer r en fonction de h.

On pourra utiliser le schéma ci-dessous qui montre une vue de profil du solide et distinguer le cas où h est un élément de I inférieur ou égal à 1 et où h est un élément de I vérifiant $h > 1$.



$$OC = 1, \quad OF = h, \quad BF = r$$

(c) Démontrer que le volume du cône Γ est :

$$V(h) = \frac{\pi}{3}h^2(2-h).$$

Q3 : Dans cette question on s'intéresse aux cônes de volume maximal.

(a) Démontrer que, pour tout réel h de l'intervalle I, la différence $\frac{32}{81}\pi - V(h)$ admet pour forme factorisée :

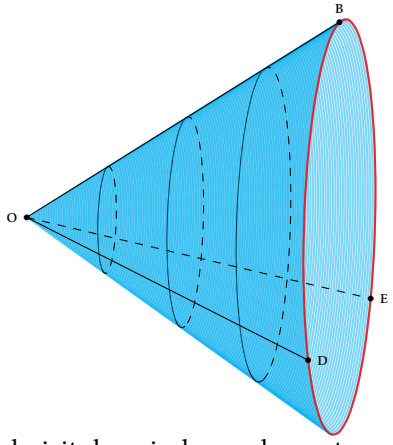
$$\frac{\pi}{81}(3h+2)(3h-4)^2.$$

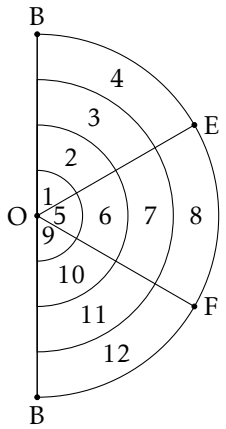
(b) Étudier le signe de la différence $\frac{32}{81}\pi - V(h)$ et en déduire que le volume V est maximal pour $h = \frac{4}{3}$.

(c) En déduire qu'il existe un unique cône de volume maximal parmi les éléments de E puis calculer le rayon et le volume de ce cône.

Partie B

Dans cette partie, on va étudier un coloriage partiel et aléatoire d'un cône de hauteur 4.
On considère le cône partagé en 12 surfaces selon l'illustration ci-dessous. On considère d'une part trois points B, E et F positionnés de façon régulière à la base du cône et d'autre part trois cercles sur le cône, parallèles au cercle du disque de base et régulièrement répartis entre le sommet O et la base.
On suppose ici que le patron de ce cône est un demi-disque. Sur ce patron, les segments [OB], [OE] et [OF] délimitent trois secteurs superposables. Chacun de ces secteurs étant partagé en quatre, on obtient 12 cases numérotées de 1 à 12 comme sur la figure ci-dessous.





Un artiste choisit de peindre seulement quatre cases du patron et la désignation des cases coloriées s'effectue grâce à l'exécution d'un programme, nommé `Mondrian.py`, qui renvoie quatre nombres aléatoires correspondant au numéro des cases à colorier.
Les couleurs associées aux secteurs respectent les consignes suivantes :

- si le quotient par 4 du numéro de la case vaut 0, alors la case est coloriée en jaune ;
- si le quotient par 4 du numéro de la case vaut 1, alors la case est coloriée en rouge ;
- sinon, la case est coloriée en bleu.

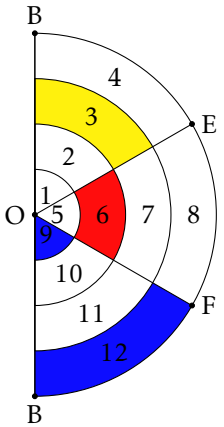
Q1 : Expliquer chacune des lignes du script suivant en lien avec la situation décrite ci-dessus :

```
1 from math import*
2 from random import*
3 for i in range (1,5):
4   Q=randint(0,2)
5   D=4*Q+i
6   print(D)
```

Q2 : Après l'exécution du programme, l'affichage est le suivant :

5
2
11
4

Colorier le patron ci-dessus en comme l'aurait fait l'artiste suivant ces instructions.



Q3 : Une seconde exécution du programme a conduit au coloriage suivant dans lequel la case 3 est jaune, la case 6 est rouge et les cases 9 et 12 sont bleues.
On observe que la surface des cases coloriées représente un tiers de la surface du patron.

(a) Est-il possible de choisir un coloriage de quatre cases de sorte que la proportion coloriée soit égale à 0,5 ?

(b) Si oui, proposer une liste de quatre cases à colorier de sorte à satisfaire cette contrainte.

(c) Existe-t-il d'autres listes envisageables ? Si oui, les dénombrer.

Exercice 3. Somme de dés

Partie A : Sommes de deux dés

On lance deux fois un dé puis on fait la somme des valeurs obtenues.

Q1 : Dans cette question, le dé est cubique, équilibré et les faces sont numérotées de 1 à 6.

(a) Recopier et compléter le tableau suivant donnant les sommes possibles.

Lancer 1 \ Lancer 2	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

Pour tout entier n entre 2 et 12 on note S_n l'événement « la somme des valeurs vaut n » et $P(S_n)$ la probabilité de l'événement S_n.

(b) Justifier que $P(S_3) = \dfrac{1}{18}$.

(c) Déterminer la valeur de $P(S_6)$.

(d) Recopier et compléter le tableau de probabilités suivant en donnant le résultat sous forme de fraction irréductible :

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(S_n)$											

(e) Quelle est la somme la plus probable ?

Q2 : Dans cette question, le dé a 4 faces numérotées de 1 à 4. Justifier que la somme la plus probable pour deux lancers est 5.

Q3 : Dans cette question, on imagine un dé a 2025 faces numérotées de 1 à 2025. Quelle est la somme la plus probable pour deux lancers ?

Partie B : Somme de deux dés truqués

On cherche à truquer un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6 pour que, lorsqu'on le lance deux fois, chacune des sommes de 2 à 12 ait la même probabilité d'être obtenue.

Supposons qu'un tel dé existe. Pour tout entier i de 1 à 6, on note p_i la probabilité d'obtenir une face dont la valeur est i en un lancer. Par exemple p_1 est la probabilité d'obtenir un 1 en un lancer.

Pour tout entier n entre 2 et 12 on note encore S_n l'événement : « la somme des valeurs vaut n ».

Q4 : Justifier que $P(S_2) = p_1^2$ et en déduire que $p_1 = \dfrac{1}{\sqrt{11}}$.

Q5 : En calculant d'autres valeurs de p_i, déterminer si un tel dé existe.

Partie C : Somme de trois dés

Au XVIIe siècle, le Grand-Duc de Toscane était un grand amateur de jeux de dés. À force de jouer, il lui semblait avoir remarqué qu'en lançant trois dés et en additionnant les résultats, il obtenait plus souvent 10 points que 9 points. Ce résultat ne lui semblait pas normal, car il se disait qu'on pouvait obtenir une somme de 9 de six façons différentes :

$$1+2+6;\quad 1+3+5;\quad 1+4+4;\quad 2+2+5;\quad 2+3+4 \text{ et } 3+3+3.$$

Mais on peut aussi obtenir 10 de six façons :

$$1+3+6;\quad 1+4+5;\quad 2+2+6;\quad 2+3+5;\quad 2+4+4 \text{ et } 3+3+4.$$

Ce problème fut, à l'époque, source de nombreuses discussions.

On lance trois fois un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6, puis on fait la somme des valeurs obtenues. Pour tout entier n on note encore S_n l'événement « la somme des trois valeurs vaut n. »

Q6 : Quels sont les valeurs possibles pour la somme des points après trois lancers du dé ?

Q7 : Combien y a-t-il de façons d'obtenir une somme de 3 ? de 4 ? En déduire $P(S_3)$ et $P(S_4)$.

Q8 : On suppose ici que la somme après trois lancers est 6. Quelles sont les résultats possibles pour la somme des deux premiers lancers ? En déduire $P(S_6)$.

Q9 : Donner la probabilité de chaque somme possible après trois lancers. On pourra donner la réponse sous forme de tableau comme au A.1.d.

Q10 : Quelle est la somme la plus probable ?

Q11 : Répondre à la problématique du Grand-Duc de Toscane.

Corrigé de l'exercice 1 : Tresses mathématiques

Partie 1 : Calculer avec des tresses

Q1 : Le calcul $1 \oplus 1$ a pour résultat 2.

$$1 \oplus 1 = 2$$

Q2 : La tresse correspondant au nombre 5 est la mise bout à bout de 5 fois la tresse 1 :

$$1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 = 5$$

Q3 : La tresse correspondant au nombre entier n est la mise bout à bout de n fois la tresse 1.

Q4 : La tresse $1 \oplus 1 \oplus (-1)$ est dessinée ci-dessous :

donne par démélage

$$1 \oplus 1 \oplus (-1) = 1$$

Le démêlage fait apparaître la tresse associée à $1 \oplus 0$, laquelle équivaut à la tresse 1.

Q5 : La tresse $1 \oplus (-2) \oplus 3$ peut se décomposer en $1 \oplus (-1) \oplus (-1) \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1$. Comme on a vu que $1 \oplus (-1) = 0$, par associativité et commutativité naturelles pour ces opérations, on obtient :

$$1 \oplus (-2) \oplus 3 = 0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 = 2$$

Q6 : La tresse $4 \oplus (-5)$ se décompose en $1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus (-1) \oplus (-1) \oplus (-1) \oplus (-1)$. Le démêlage par l'intérieur donne successivement :

$$\begin{aligned} 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus (-1) \oplus (-1) \oplus (-1) &\quad \text{(première annulation)} \\ 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus (-1) \oplus (-1) &\quad \text{(deuxième annulation)} \\ 1 \oplus 0 \oplus (-1) &\quad \text{(troisième annulation)} \\ 0 \oplus (-1) = (-1) & \end{aligned}$$

La tresse $4 \oplus (-5)$ est donc égale à la tresse (-1).

Partie 2 : Codage des tresses

Q1 : La figure 1 est constituée de la mise bout à bout des tresses élémentaires suivantes :

- le brin 2 passe sous le brin 1 : $\overline{S_1}$
- le brin 4 passe sous le brin 3 : $\overline{S_3}$
- le brin 1 passe sous le brin 2 : S_1
- le brin 2 passe sous le brin 3 : S_2

Ce qui correspond à l'addition :

$$\overline{S_1} \oplus \overline{S_3} \oplus S_1 \oplus S_2$$

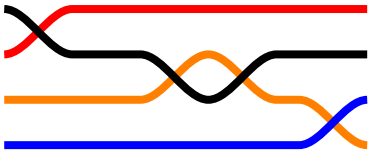
Q2 : La figure 2 est constituée de la mise bout à bout des tresses élémentaires suivantes :

- le brin 3 passe sous le brin 2 : $\overline{S_2}$
- le brin 2 passe sous le brin 1 : $\overline{S_1}$
- le brin 3 passe sous le brin 4 : S_3
- le brin 2 passe sous le brin 3 : S_2

Ce qui correspond à l'addition :

$$\overline{S_2} \oplus \overline{S_1} \oplus S_3 \oplus S_2$$

Q3 : La tresse $S_3 \oplus S_2 \oplus \overline{S_2} \oplus \overline{S_1}$ est dessinée ci-dessous.



Partie 3 : Démêlage

Q1 : Avec pour situation initiale où le brin 1 est rouge, le brin 2 vert, le brin 3 bleu et le brin 4 noir :

- $S_1 \oplus S_2$ fait passer le brin 1 (rouge) sous le brin 2 (vert) puis le brin 2 (à présent rouge) sous le brin 3 (bleu). L'ordre final est de bas en haut : vert, bleu, rouge, noir.
- $S_2 \oplus S_1$ fait passer le brin 2 (vert) sous le brin 3 (bleu) puis le brin 1 (rouge) sous le brin 2 (à présent bleu). L'ordre final est de bas en haut : bleu, rouge, vert, noir.

Les deux opérations ne sont donc pas équivalentes.

Q2 : Une tresse équivalente à $S_1 \oplus \overline{S_1}$ est la tresse nulle 0.

Q3 : Une tresse équivalente à $\overline{S_1} \oplus S_1$ est la tresse nulle 0.

Q4 : Le calcul $\overline{S_1} \oplus S_1 \oplus S_2 \oplus S_3 \oplus \overline{S_3}$ équivaut à :

$$0 \oplus S_2 \oplus 0 = S_2$$

Q5 : Justification des égalités :

$$\begin{aligned}
S_1 \oplus S_2 \oplus \overline{S_1} &= \overline{S_2} \oplus S_2 \oplus S_1 \oplus S_2 \oplus \overline{S_1} \quad (\text{ajout de } \overline{S_2} \oplus S_2 = 0)\\
&= \overline{S_2} \oplus S_1 \oplus S_2 \oplus S_1 \oplus \overline{S_1} \quad (\text{règle 3 pour } i = 1, j = 2)\\
&= \overline{S_2} \oplus S_1 \oplus S_2 \quad (\text{car } S_1 \oplus \overline{S_1} = 0)
\end{aligned}$$

Q6 : Preuve de $\overline{S_1} \oplus S_2 \oplus S_1 = S_2 \oplus S_1 \oplus \overline{S_2}$:

$$\begin{aligned}
\overline{S_1} \oplus S_2 \oplus S_1 &= \overline{S_1} \oplus S_2 \oplus S_1 \oplus 0\\
&= \overline{S_1} \oplus S_2 \oplus S_1 \oplus (\overline{S_2} \oplus S_2) \quad (\text{règle 1})\\
&= \overline{S_1} \oplus S_1 \oplus S_2 \oplus \overline{S_2} \oplus S_2 \quad (\text{règle 3 pour } i = 1, j = 2)\\
&= 0 \oplus S_2 \oplus \overline{S_2} \oplus S_2 \quad (\text{règle 1})\\
&= S_2 \oplus \overline{S_2} \oplus S_2\\
&= S_2 \oplus S_1 \oplus \overline{S_2} \quad (\text{par symétrie des rôles})
\end{aligned}$$

Q7 : Preuve de $S_1 \oplus S_3 \oplus \overline{S_1} = S_3$:

$$\begin{aligned}
S_1 \oplus S_3 \oplus \overline{S_1} &= S_3 \oplus S_1 \oplus \overline{S_1} \quad (\text{règle 2, car écart} > 1)\\
&= S_3 \oplus 0 \quad (\text{règle 1})\\
&= S_3
\end{aligned}$$

Q8 : Preuve de :

$$S_1 \oplus S_2 \oplus S_3 \oplus S_1 \oplus S_2 \oplus S_1 = S_3 \oplus S_1 \oplus S_2 \oplus S_3 \oplus S_1 \oplus S_2$$

$$\begin{aligned}
&S_1 \oplus S_2 \oplus S_3 \oplus S_1 \oplus S_2 \oplus S_1\\
&= S_1 \oplus S_2 \oplus S_3 \oplus S_2 \oplus S_1 \oplus S_2 \quad (\text{règle 3 pour } i = 1, j = 2)\\
&= S_1 \oplus S_3 \oplus S_2 \oplus S_3 \oplus S_1 \oplus S_2 \quad (\text{règle 3 pour } i = 2, j = 3)\\
&= S_3 \oplus S_1 \oplus S_2 \oplus S_1 \oplus S_3 \oplus S_2 \quad (\text{règle 2 pour } i = 1, j = 3)\\
&= S_3 \oplus S_1 \oplus S_2 \oplus S_3 \oplus S_1 \oplus S_2 \quad (\text{règle 2 pour } i = 1, j = 3)
\end{aligned}$$

Partie A : Étude d'un cône de sommet O

Q1 : Camille et Dominique

(a) • Cas où $h = 1$: alors $r = 1$ et le volume du cône est

$$V_A = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \times 1^2 \times 1 = \frac{1}{3}\pi.$$

• Cas où $h = \frac{3}{2}$: alors $CF = \frac{1}{2}$. Le triangle BCF est rectangle en F, donc

$$r^2 = BC^2 - CF^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Le volume est

$$V_B = \frac{1}{3}\pi \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{2} = \frac{3}{8}\pi.$$

(b) Comparaison :

$$\frac{1}{3} = \frac{8}{24}, \quad \frac{3}{8} = \frac{9}{24}, \quad \text{donc} \quad V_A < V_B.$$

Camille a tort.

Q2 : Expression des paramètres

(a) Le point F (centre du disque de base) peut décrire le diamètre issu de O privé de ses extrémités, donc $h \in]0, 2[$.

(b) Le triangle BCF est rectangle en F, avec $BC = 1$, $BF = r$, $CF = |h - 1|$. D'après le théorème de Pythagore :

$$r^2 = 1 - (h-1)^2 = 2h - h^2.$$

Ainsi

$$r = \sqrt{2h - h^2}.$$

(c) Volume du cône en fonction de h :

$$V(h) = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi(2h - h^2)h = \frac{1}{3}\pi(2-h)h^2.$$

Q3 : Recherche du maximum

(a) Pour $h \in]0, 2[$, montrons que

$$\frac{32}{81}\pi - V(h) = \frac{\pi}{81}(3h+2)(3h-4)^2.$$

Calculons :

$$\begin{aligned}\frac{32}{81}\pi - V(h) &= \frac{32}{81}\pi - \frac{1}{3}\pi(2-h)h^2 \\ &= \frac{\pi}{81}\left[32 - 27(2-h)h^2\right] \\ &= \frac{\pi}{81}\left(32 - 54h^2 + 27h^3\right).\end{aligned}$$

Or

$$(3h+2)(3h-4)^2 = (3h+2)(9h^2 - 24h + 16) = 27h^3 - 54h^2 + 32.$$

D'où l'égalité demandée.

(b) Étude du signe :

Pour $h \in]0, 2[$, $3h + 2 > 0$ et $(3h-4)^2 \geq 0$, avec égalité ssi $h = \frac{4}{3}$. Donc $\frac{32}{81}\pi - V(h) \geq 0$, avec annulation en $h = \frac{4}{3}$. Ainsi, $V(h)$ atteint son maximum en $h = \frac{4}{3}$.

(c) Calcul du rayon et du volume maximal :

Pour $h = \frac{4}{3}$,

$$r = \sqrt{2 \times \frac{4}{3} - \left(\frac{4}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{8}{3} - \frac{16}{9}} = \sqrt{\frac{24-16}{9}} = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Le volume maximal est

$$V_{max} = \frac{32}{81}\pi.$$

Partie B : Coloriage aléatoire d'un patron de cône

Q1 : Explication du script :

- `From math import` et `From random import` : importation des bibliothèques mathématiques et de génération aléatoire.
- `For i in range (1,5)` : boucle avec compteur i variant de 1 à 4.
- `Q = randint(0,2)` : affectation à Q d'un entier aléatoire parmi $\{0, 1, 2\}$.
- `D = 4*Q + i` : calcul du numéro du secteur.
- `print(D)` : affichage du résultat.

Q2 : Interprétation d'une sortie :
Si les nombres affichés sont 5, 2, 11, 4, alors :

- 5 : quotient par 4 = 1 $\longrightarrow$ rouge.
- 2 : quotient par 4 = 0 $\longrightarrow$ jaune.
- 11 : quotient par 4 = 2 $\longrightarrow$ bleu.
- 4 : quotient par 4 = 1 $\longrightarrow$ rouge.

Q3 : Recherche de secteurs à colorier pour obtenir la moitié de la surface :

Méthode géométrique :

L'union des secteurs 1, 2, 5, 6, 9 et 10 représente un quart de la surface totale (demi-disque de rayon $\frac{1}{2}$).

Chacune des paires $\{3,4\}$, $\{7,8\}$ et $\{11,12\}$ représente un quart de la surface totale.

Pour obtenir la moitié de la surface avec quatre secteurs, on peut colorier deux paires parmi ces trois (soit 3 choix possibles).

Méthode par le calcul :

Proportions des aires des secteurs (par rapport à l'aire totale) :

- secteurs 1, 5, 9 : $\frac{1}{48}$
- secteurs 2, 6, 10 : $\frac{3}{48}$
- secteurs 3, 7, 11 : $\frac{5}{48}$
- secteurs 4, 8, 12 : $\frac{7}{48}$

On cherche quatre nombres dont la somme vaut $\frac{24}{48} = \frac{1}{2}$, donc dont la somme des numérateurs vaut 24. Les seules combinaisons possibles sont :

$$7 + 7 + 7 + 3 = 24 \quad \text{ou} \quad 7 + 7 + 5 + 5 = 24.$$

Ainsi, outre la solution géométrique, on peut aussi colorier les secteurs 4, 8, 12 (valeurs 7) et l'un des secteurs 2, 6 ou 10 (valeur 3).

Corrigé de l'exercice 3 : Somme de dés

Partie A : Lancer de deux dés équilibrés

Q1 : Dé cubique à 6 faces

(a)

Lancer 1 \ Lancer 2	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

(b) Somme valant 3 : issues (1,2) et (2,1). Donc

$$P(S_3) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}.$$

(c) Somme valant 6 : issues (1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1). Donc

$$P(S_6) = \frac{5}{36}.$$

(d) Loi de probabilité de la somme S pour deux dés cubiques :

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(S_n)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

(e) La somme la plus probable est 7 (probabilité $\frac{1}{6}$).

Q2 : Dé à 4 faces
Il y a 16 issues équiprobables. La loi de la somme est :

n	2	3	4	5	6	7	8
$P(S_n)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$

La somme la plus probable est 5 (probabilité $\frac{1}{4}$).

Q3 : Dé à 2025 faces
Pour $2 \leq n \leq 2025$, il y a $n-1$ issues donnant la somme n.
Pour $2027 \leq n \leq 4050$, il y a $4051 - n$ issues.
Le maximum est atteint pour $n = 2026$ avec 2025 issues.
La somme la plus probable est 2026, avec probabilité $\frac{2025}{2025^2} = \frac{1}{2025}$.

Partie B : Deux dés truqués

On suppose que toutes les sommes (de 2 à 12) sont équiprobables : $P(S_n) = \frac{1}{11}$.

Q1 : Somme valant 2 : seule issue (1,1). Donc

$$p_1^2 = \frac{1}{11} \quad \text{soit} \quad p_1 = \frac{1}{\sqrt{11}}.$$

Q2 : Somme valant 3 : issues (1,2) et (2,1). Donc

$$2p_1p_2 = \frac{1}{11} \quad \text{donc} \quad p_2 = \frac{1}{2\sqrt{11}}.$$

Somme valant 4 : issues (1,3), (2,2), (3,1). Donc

$$2p_1p_3 + p_2^2 = \frac{1}{11}.$$

On en déduit

$$p_3 = \frac{\frac{1}{11} - \frac{1}{4\times 11}}{2 \times \frac{1}{\sqrt{11}}} = \frac{3}{8\sqrt{11}}.$$

Q3 : Impossibilité d'un tel dé
Par symétrie, on aurait de même :

$$p_6 = \frac{1}{\sqrt{11}}, \quad p_5 = \frac{1}{2\sqrt{11}}, \quad p_4 = \frac{3}{8\sqrt{11}}.$$

Alors

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = \frac{15}{4\sqrt{11}} \neq 1.$$

Donc un tel dé n'existe pas.
Autre preuve (par l'absurde) :
Si un tel dé existait, on aurait $p_1 = p_6 = \frac{1}{\sqrt{11}}$. Or $P(S_7) \geq p_1p_6 + p_6p_1 = \frac{2}{11}$, mais par hypothèse $P(S_7) = \frac{1}{11}$.
Contradiction.

Partie C : Trois dés cubiques équilibrés

Q1 : La somme peut varier de 3 à 18.

Q2 :
- Somme 3 : seule issue (1,1,1). Donc $P(S_3) = \frac{1}{216}$.
- Somme 4 : issues (1,1,2), (1,2,1), (2,1,1). Donc $P(S_4) = \frac{3}{216} = \frac{1}{72}$.

Q3 : Somme 6 :
On décompose selon la valeur du troisième dé :

- si le troisième dé donne 1, il faut que la somme des deux premiers soit 5 $\rightarrow$ 4 issues.
- si le troisième dé donne 2, il faut que la somme des deux premiers soit 4 $\rightarrow$ 3 issues.
- si le troisième dé donne 3, il faut que la somme des deux premiers soit 3 $\rightarrow$ 2 issues.
- si le troisième dé donne 4, il faut que la somme des deux premiers soit 2 $\rightarrow$ 1 issue.

Total : $4 + 3 + 2 + 1 = 10$ issues. Donc $P(S_6) = \dfrac{10}{216} = \dfrac{5}{108}$.

Q4 : Loi de probabilité (somme de trois dés) :

n	3	4	5	6	7	8	9
$P(S_n)$	$\frac{1}{216}$	$\frac{3}{216}$	$\frac{6}{216}$	$\frac{10}{216}$	$\frac{15}{216}$	$\frac{21}{216}$	$\frac{25}{216}$

n	10	11	12	13	14	15
$P(S_n)$	$\frac{27}{216}$	$\frac{27}{216}$	$\frac{25}{216}$	$\frac{21}{216}$	$\frac{15}{216}$	$\frac{10}{216}$

n	16	17	18
$P(S_n)$	$\frac{6}{216}$	$\frac{3}{216}$	$\frac{1}{216}$

Q5 : Les sommes les plus probables sont 10 et 11 (probabilité $\dfrac{27}{216} = \dfrac{1}{8}$ chacune).

Q6 : Paradoxe du Duc de Toscane

Le duc observait que 9 apparaissait moins souvent que 10 avec trois dés, alors qu'il y a autant de décompositions additives (6 façons d'obtenir 9 et 6 façons d'obtenir 10). Mais les tirages ordonnés ne sont pas équiprobables pour une même décomposition : par exemple, (3,3,3) n'a qu'un ordre, tandis que (1,2,6) en a 6. En dénombrant précisément :

- Somme 9 : 25 issues.
- Somme 10 : 27 issues.

Donc $P(S_9) < P(S_{10})$, ce qui explique l'observation.