Exercice 1. Le rouge et le noir

On pourra utiliser sans démonstration la propriété suivante : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Partie A – Les nombres rationnels positifs

On rappelle qu'un nombre rationnel est un nombre qui peut s'écrire sous la forme $\dfrac{a}{b}$ avec a et b entiers, $b \neq 0$.
En suivant les 3 règles ci-dessous, on attribue à chaque **nombre rationnel positif** une couleur, soit le rouge, soit le noir :

- Le nombre 0 est rouge. Règle (R1)
- Les nombres x et $x + 1$ sont de couleurs différentes. Règle (R2)
- Si $x \neq 0$, les nombres x et $\dfrac{1}{x}$ sont de la même couleur. Règle (R3)

Q1 : Quelle est la couleur du nombre 7 ? Quelle est celle du nombre 36 ?

Q2 : Quels entiers positifs sont de couleur rouge ? Quels entiers positifs sont de couleur noire ? Aucune justification n'est attendue.

Q3 : **(a)** Quelle est la couleur du nombre $\dfrac{1}{2}$?

(b) Donner deux nombres rationnels positifs de couleur rouge dont la somme est un nombre de couleur noire.

(c) Donner deux nombres rationnels positifs de couleur rouge dont la somme est un nombre de couleur rouge.

Q4 : Soit n un entier strictement positif.

(a) Quelle est la couleur de $n + \dfrac{1}{n}$?

(b) Quelle est celle de $\dfrac{(n+1)^2}{n}$ puis celle de $\dfrac{n}{(n+1)^2}$?

Q5 : De quelle couleur est le nombre $a = \dfrac{13}{5}$?

Q6 : Quelle est ou quelles sont les couleurs des nombres $\dfrac{1}{4}$ et $\dfrac{3}{4}$?

Q7 : Déterminer la couleur du nombre $\dfrac{4}{27}$.

Q8 : Quelle est la couleur de

$$b = 1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{9 + \cfrac{1}{16 + \cfrac{1}{25}}}} ?$$

Q9 : **(a)** Quelle est la couleur de $c = \dfrac{2025}{1001}$?

(b) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{N}^*$.
Si q est le quotient et r le reste de la division euclidienne de n par m, alors $n = qm + r$ où q et r sont des entiers naturels avec $0 \leqslant r < m$.
Comparer les couleurs de $\dfrac{n}{m}$ et de $\dfrac{r}{m}$. Expliquer alors comment poursuivre afin de déterminer la couleur du nombre rationnel positif $\dfrac{n}{m}$.

Q10 : Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. On pose

$$d = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{n - 1 + \cfrac{1}{n}}}}}}.$$

(a) Démontrer que d est de la même couleur que $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

(b) Quelle est la couleur de d si n est un multiple de 4 ?

(c) En déduire la couleur de d selon les valeurs de n.

On cherche maintenant à savoir si les 3 règles permettent d'attribuer une couleur à tout nombre réel.

Partie B – Cas des nombres rationnels négatifs

On suppose pour cela qu'on a attribué, avec les 3 règles, une couleur à chaque nombre rationnel (positif ou négatif).

Q12 : En considérant par exemple les couleurs de $\dfrac{1}{2}$ et $-\dfrac{1}{2}$, montrer qu'on arrive à une contradiction.

Q13 : Que peut-on en conclure ?

Partie C – Cas des nombres réels positifs

On suppose qu'on a attribué, avec les 3 règles, une couleur à chaque nombre réel positif. On s'intéresse à l'équation $\dfrac{1}{x} = x - 1$.

Q14 : Montrer que $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ est solution de cette équation.

Q15 : Que peut-on en déduire ?

Exercice 2. Déambulations dans Mathanan

Dans l'ensemble de ce problème, le plan de la ville imaginaire de Mathanan est schématisé par une grille régulière sur laquelle les rues sont représentées par des segments et les carrefours sont les points d'intersection des rues. Cette grille est illimitée dans toutes les directions. On appelle :

- **Déplacement**, un trajet via une rue entre 2 carrefours consécutifs.
- **Chemin allant d'un carrefour A à un carrefour B**, toute succession de déplacements partant du carrefour A et arrivant au carrefour B.
- **Longueur du chemin de A à B**, le nombre de déplacements pour aller du carrefour A au carrefour B.

On a représenté sur la figure n°1 un exemple de chemin de longueur 17, puisqu'il y a 17 déplacements allant du carrefour A au carrefour B.

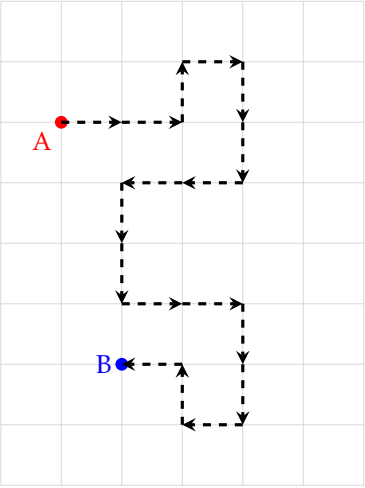


Figure n°1

On appelle **distance de Mathanan** de A à B, la longueur minimale des chemins allant d'un carrefour A à un carrefour B. On la note $d(\mathrm{A}, \mathrm{B})$.

Remarque : cette distance ainsi définie est utilisée dans différents domaines. Par exemple, cela peut être le cas en biologie pour déterminer la « proximité génétique ».

Partie A : Plus courts chemins entre deux carrefours

Sur la grille de la figure n°2 ci-contre :

Q1 : Quelle est la distance de Mathanan de A à B ?

Q2 : Quel est le nombre de chemins de longueur 4 allant du carrefour A au carrefour C ?

Q3 : Quel est le nombre de chemins de longueur minimale allant du carrefour A au carrefour B en passant par le carrefour C ?
(Aucune justification n'est attendue.)

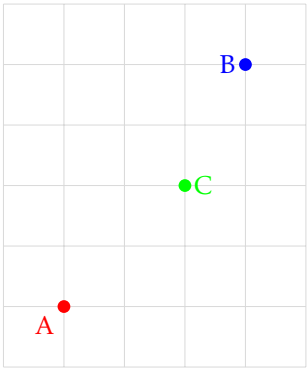


Figure n°2

Partie B : Une expression algébrique de la distance de Mathanan

Sur une grille, on choisit trois sommets consécutifs d'un carré que l'on nomme I, O, J dans cet ordre. Ainsi, dans le repère (O, I, J), les coordonnées de tous les carrefours sont des couples d'entiers relatifs.
Dans toute la suite, on travaille dans un tel repère.

Q4 : Trois ensembles particuliers

a) Sur la figure n°4, marquer tous les carrefours M tels que : $d(\mathrm{A}, \mathrm{M}) = 3$.
Cet ensemble de points est appelé **cercle de Mathanan** de centre A(2; 3) et de rayon 3.

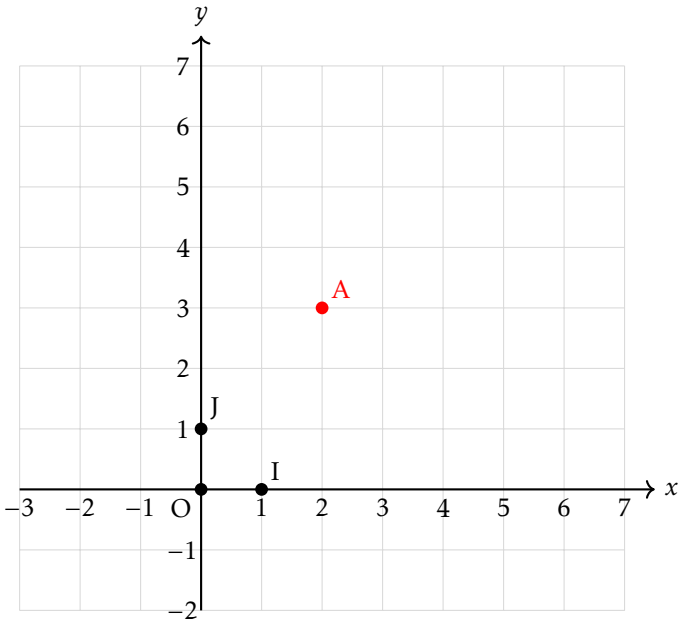


Figure n°4

b) Sur la figure n°5, marquer d'une croix bleue tous les carrefours N tels que : $d(\mathrm{A}, \mathrm{N}) = d(\mathrm{B}, \mathrm{N})$.
Cet ensemble de points est appelé **médiatrice de Mathanan** des carrefours A(2; 4) et B(3; 1).

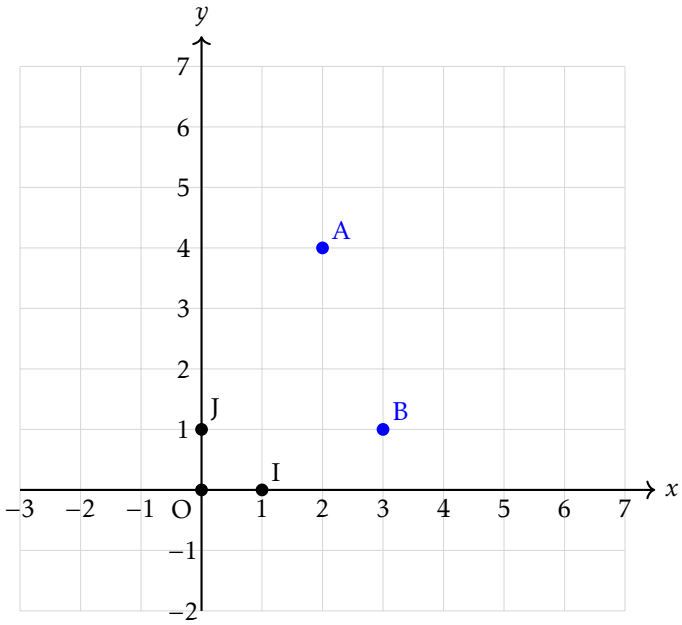


Figure n°5

c) Sur la figure n°5, marquer d'un rond rouge tous les carrefours K tels que :

$$d(\mathrm{A},\mathrm{K}) = d(\mathrm{B},\mathrm{K}) = \frac{d(\mathrm{A},\mathrm{B})}{2}$$

Cet ensemble de points est appelé **milieux de Mathanan** pour les carrefours A(2; 4) et B(3; 1).

Q5 : Expression algébrique
On rappelle que $|x|$ désigne la valeur absolue du nombre réel x.
Soient A et B deux carrefours de coordonnées $\mathrm{A}(x_\mathrm{A}, y_\mathrm{A})$ et $\mathrm{B}(x_\mathrm{B}, y_\mathrm{B})$.
Expliquer pourquoi

$$d(\mathrm{A},\mathrm{B}) = |x_\mathrm{B} - x_\mathrm{A}| + |y_\mathrm{B} - y_\mathrm{A}|.$$

Q6 : Étude d'une intersection
Soit E_1 l'ensemble des carrefours $\mathrm{M}(x, y)$ tels que $|x-1| + |y-1| = 2$, et soit E_2 l'ensemble des carrefours $\mathrm{M}(x, y)$ tels que $|x+1| + |y+3| = 5$.

a) E_1 peut-il être considéré comme un cercle, une médiatrice, des milieux de Mathanan, comme décrit à la question 4. ? Si oui, préciser les éléments qui le définissent. Même question pour E_2.
b) Démontrer que si (x, y) est un couple d'entiers tel que x et y sont soit tous les deux pairs, soit tous les deux impairs alors $|x+1| + |y+3| \neq 5$.
c) Démontrer que les ensembles E_1 et E_2 ont une intersection vide. (On pourra raisonner par l'absurde)

Partie C : Milieux et cercles de Mathanan : une étude générale.

Soient A et B deux carrefours **distincts** de coordonnées $\mathrm{A}(x_\mathrm{A}; y_\mathrm{A})$ et $\mathrm{B}(x_\mathrm{B}; y_\mathrm{B})$.
On note $\mathrm{V}_x = |x_\mathrm{B} - x_\mathrm{A}|$ et $\mathrm{V}_y = |y_\mathrm{B} - y_\mathrm{A}|$.

Q7 : Montrer que si $d(\mathrm{A},\mathrm{B})$ est un entier impair, alors l'ensemble des milieux de Mathanan pour A et B est vide.
Dorénavant on suppose que $d(\mathrm{A},\mathrm{B})$ est un entier pair, et on l'écrit sous la forme $d(\mathrm{A},\mathrm{B}) = 2p$ où p est un entier naturel.

Q8 : Dans le cas $\mathrm{V}_x = 0$, montrer que l'ensemble des milieux de Mathanan pour A et B contient au moins un point. Y en a-t-il d'autres ?

Q9 : Dans le cas $\mathrm{V}_x > \mathrm{V}_y > 0$, justifier que l'ensemble des milieux de Mathanan pour A et B contient au moins deux points.
À l'aide d'un dessin, proposer une formule donnant le nombre exact de points constituant l'ensemble des milieux de Mathanan pour A et B en fonction de V_x et/ou de V_y.

Q10 : Reprendre la question précédente dans le cas $\mathrm{V}_x = \mathrm{V}_y > 0$.

Q11 : Plus généralement, on considère les cercles de Mathanan de rayon r_1 et r_2 centrés en A et B.
On suppose $d(\mathrm{A},\mathrm{B}) = r_1 + r_2$.

(a) Ces deux cercles de Mathanan présentent-ils une intersection non vide ?
(b) Combien ont-ils alors de points d'intersection ?

On pourra s'inspirer des questions précédentes pour séparer les cas en fonction de V_x de V_y mais aussi de r_1 et de r_2.

Exercice 3. Des frises noires et blanches

Partie A – Des frises à une ligne sans contrainte

Pour réaliser une **frise à une ligne**, on place de gauche à droite des carreaux noirs et blancs que l'on dispose dans l'ordre que l'on veut. Une frise peut être entièrement blanche ou entièrement noire.
On appelle **longueur** de la frise le nombre de carreaux qui la compose.

Voici par exemple deux frises différentes de longueur 8 :

Q1 : Dessiner sur votre feuille les quatre frises différentes de longueur 5 avec trois carreaux noirs en position 2, 4 et 5.

Q2 : Avec dix carreaux noirs et dix carreaux blancs, combien de frises différentes de longueur 20 peut-on imaginer si l'on veut que les dix carreaux noirs soient côte à côte ?

Q3 : Combien existe-t-il de frises différentes de longueur 5 avec exactement 3 carreaux blancs ?

Q4 : L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ?
Affirmation : « Le nombre de frises différentes de longueur 3 que l'on peut former est égal à 6. »

Q5 : Pour tout nombre entier n supérieur ou égal à 1, exprimer en fonction de n le nombre de frises différentes de longueur n que l'on peut construire.

Partie B – Des frises à une ligne sans carreaux noirs côte à côte

Dans toute cette partie, on réalise toujours des frises à une ligne mais on s'impose maintenant de ne jamais mettre 2 carreaux noirs l'un à côté de l'autre. On les appellera les **b-frises**.

Q6 : Dessiner sur votre feuille toutes les b-frises possibles de longueur 2 puis toutes celles de longueur 3.

Q7 : Voici trois b-frises de longueur 4 :

(a) Dessiner sur votre feuille toutes les autres b-frises de longueur 4.
(b) Vérifier que le nombre de b-frises de longueur 4 est égal à la somme du nombre de b-frises de longueur 2 et du nombre de b-frises de longueur 3.

Q8 : **(a)** Justifier que le nombre de b-frises de longueur $n+2$ se terminant par un carreau noir est égal au nombre de b-frises de longueur n.
(b) En déduire que pour tout nombre entier n supérieur ou égal à 1, en additionnant le nombre de b-frises de longueur n et le nombre de b-frises de longueur $n+1$, on obtient le nombre de b-frises de longueur $n+2$.

Q9 : Combien existe-t-il de b-frises différentes de longueur 8 ?

Q10 : À partir de quelle valeur de n le nombre de b-frises de longueur n est-il supérieur à 2025 ?

Partie C - Des frises à deux lignes sans carreaux noirs côte à côte

Dans cette partie, on considère des frises à 2 lignes et n colonnes composées de carreaux noirs et blancs, pour n entier naturel non nul, et qui ont la particularité suivante :

Deux cases qui ont un côté en commun **horizontalement ou verticalement** ne peuvent pas être toutes les deux noires. On les appellera les **c-frises**.
La **longueur** d'une c-frise est son nombre de colonnes.

Voici par exemple une c-frise de longueur 7 :

Q11 : Dessiner toutes les c-frises de longueur 1, puis les sept c-frises de longueur 2.

Q12 : Établir que le nombre de c-frises de longueur $n+2$ est égal à la somme du nombre de c-frises de longueur n et du double du nombre de c-frises de longueur $n+1$.

Corrigé de l'exercice 1 : Le rouge et le noir

Partie A – Les nombres rationnels positifs

Q1 : D'après (R2), 0 est rouge donc 1 est noir, 2 est rouge, 3 est noir, etc. Ainsi, les entiers impairs sont noirs et les entiers pairs sont rouges. Donc 7 (impair) est noir et 36 (pair) est rouge.

Q2 : Les entiers pairs sont rouges, les entiers impairs sont noirs.

Q3 : **(a)** 2 est rouge, donc d'après (R3), $\frac{1}{2}$ est aussi rouge.

(b) $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$, tous deux rouges, leur somme 1 est noire.

(c) 2 et 4 sont tous deux rouges (car 2 et 4 sont pairs), leur somme 6 est rouge.

Q4 : Soit n un entier strictement positif.

Dans la suite on notera $n \sim m$ pour indiquer que n et m ont la même couleur, et $m \nsim m$ sinon.

(a) Si $n = 2k$ (n pair, donc rouge). $\frac{1}{n}$ a la même couleur que n. $\frac{1}{n} + 2$ aussi. Donc par suite, $\frac{1}{n} + 2$ est rouge.

Si $n = 2k + 1$ (n impair, donc noir). $\frac{1}{n}$ a la même couleur que n. $\frac{1}{n} + 1$ est rouge ; donc par suite $\frac{1}{n} + 1 + 2k$ est rouge.

Cas tous les cas, $n + \frac{1}{n}$ est rouge.

(b) $\frac{(n+1)^2}{n} = \frac{n^2 + 2n + 1}{n} = n + 2 + \frac{1}{n}$. D'après (a), $n + \frac{1}{n}$ est rouge, donc $n + 2 + \frac{1}{n}$ a la même couleur que $(n + \frac{1}{n}) + 2$, donc la même couleur que $n + \frac{1}{n}$ (car +2 ne change pas la couleur). Donc $\frac{(n+1)^2}{n}$ est rouge.

Q5 : $\frac{13}{5} = 2 + \frac{3}{5} \sim \frac{3}{5} \sim \frac{5}{3} = 1 + \frac{2}{3} \nsim \frac{2}{3} \sim \frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2} \nsim \frac{1}{2} \sim 2$ rouge.

Q6 : $\frac{1}{4} \sim 4$ est pair donc rouge.

$\frac{3}{4} \sim \frac{4}{3} = 1 + \frac{1}{3} \nsim \frac{1}{3} \sim 3$ (noir). Donc $\frac{3}{4}$ est rouge.

Q7 : $\frac{4}{27} \sim \frac{27}{4} = 6 + \frac{3}{4} \sim \frac{3}{4}$ rouge (question 6).

Q8 : On calcule étape par étape en partant de la fin : 25 est noir.

$$25 \sim \frac{1}{25} \sim 16 + \frac{1}{25} \sim \frac{1}{16 + \frac{1}{25}} \nsim 9 + \frac{1}{16 + \frac{1}{25}} \sim \frac{1}{9 + \frac{1}{16 + \frac{1}{25}}} \sim 4 + \frac{1}{9 + \frac{1}{16 + \frac{1}{25}}} \sim \frac{1}{4 + \frac{1}{9 + \frac{1}{16 + \frac{1}{25}}}} \nsim b.$$

Donc b est noir.

Q9 : **(a)** $\frac{2025}{1001} = 2 + \frac{23}{1001} \sim \frac{23}{1001} \sim \frac{1001}{23} = 43 + \frac{12}{23} \nsim \frac{12}{23} \sim \frac{23}{12} = 1 + \frac{11}{12} \nsim \frac{11}{12} \sim \frac{12}{11} = 1 + \frac{1}{11} \nsim \frac{1}{11} \sim 11$ noir.

Finalement $\frac{2025}{1001}$ est rouge.

(b) $\frac{n}{m} = q + \frac{r}{m}$. Si q est pair, alors $\frac{n}{m}$ a même couleur que $\frac{r}{m}$. Si q est impair, alors $\frac{n}{m}$ a couleur opposée à $\frac{r}{m}$. On peut donc réduire le problème à un rationnel avec numérateur plus petit que le dénominateur, puis échanger numérateur et dénominateur (qui conserve la couleur), etc. C'est l'algorithme d'Euclide qui termine avec un entier. La couleur se détermine alors par la parité de cet entier.

Q10 : **(a)** $\frac{1}{n} \sim n$ donc la couleur de $n - 1 + \frac{1}{n}$ est la même que $n - 1 + n$ et de proche en proche la couleur de d est celle de $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

(b) Si n multiple de 4, $\frac{n(n+1)}{2}$ est pair (car $n/2$ entier et $n + 1$ impair), donc rouge.

(c) d a la couleur de $\frac{n(n+1)}{2}$: rouge si $n \equiv 0$ ou $3 \pmod 4$, noir si $n \equiv 1$ ou $2 \pmod 4$.

Partie B – Cas des nombres rationnels négatifs

Q12 : Supposons qu'on ait étendu les règles à tous les rationnels.

D'après (R3), $\frac{1}{2}$ est rouge comme 2.

D'après (R2), -2 est rouge car $-2+2=0$, donc $-\frac{1}{2}$ est rouge donc, d'après (R2), $-\frac{1}{2}+1$ est noir donc $\frac{1}{2}$ est noir, absurde.

Q13 : On en conclue qu'il est impossible d'étendre le coloriage à tous les rationnels (positifs et négatifs) en respectant les trois règles (R1), (R2), (R3). Les règles sont contradictoires dès qu'on inclut les négatifs.

Partie C – Cas des nombres réels positifs

Q14 : Soit $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Alors $\varphi - 1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Et $\frac{1}{\varphi} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{2(\sqrt{5}-1)}{(1+\sqrt{5})(\sqrt{5}-1)} = \frac{2(\sqrt{5}-1)}{5-1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Donc bien $\frac{1}{\varphi} = \varphi - 1$.

Q15 : Si on suppose qu'on a étendu le coloriage à tous les réels positifs, alors pour $x = \varphi$, on a d'après (R3) que φ et $\frac{1}{\varphi}$ ont même couleur. Mais $\frac{1}{\varphi} = \varphi - 1$, et d'après (R2), φ et $\varphi - 1$ ont des couleurs différentes. Contradiction.
Donc il est impossible d'étendre le coloriage à tous les réels positifs tout en respectant (R1), (R2), (R3).

Corrigé de l'exercice 2 : Déambulations dans Mathanan

Partie A : Plus courts chemins entre deux carrefours

Q1 : Distance de Mathanan de A à B :

La distance de Mathanan est la longueur du chemin minimal, c'est-à-dire le nombre minimal de déplacements horizontaux et verticaux nécessaires pour aller de A à B.

Sur la figure n°2, il faut au minimum 7 déplacements pour aller de A à B.

Q2 : Nombre de chemins de longueur 4 allant de A à C :

Pour compter les chemins de longueur minimale 4, on note qu'il faut faire exactement 2 déplacements vers l'est (E) et 2 déplacements vers le nord (N), dans n'importe quel ordre.

Les 6 chemins sont : EENN, ENEN, ENNE, NEEN, NENE, NNEE.

Q3 : Nombre de chemins de longueur minimale de A à B en passant par C :

Pour aller de C à B en 3 déplacements minimaux, il faut faire 1 déplacement vers l'est et 2 déplacements vers le nord, dans n'importe quel ordre.

Le nombre de chemins de C à B est 3.

Par le principe multiplicatif, le nombre total de chemins de A à B passant par C est : $6 \times 3 = 18$.

Partie B : Une expression algébrique de la distance de Mathanan

Q4 : Trois ensembles particuliers :

a) **Cercle de Mathanan de centre** A(2, 3) **et de rayon 3 :**

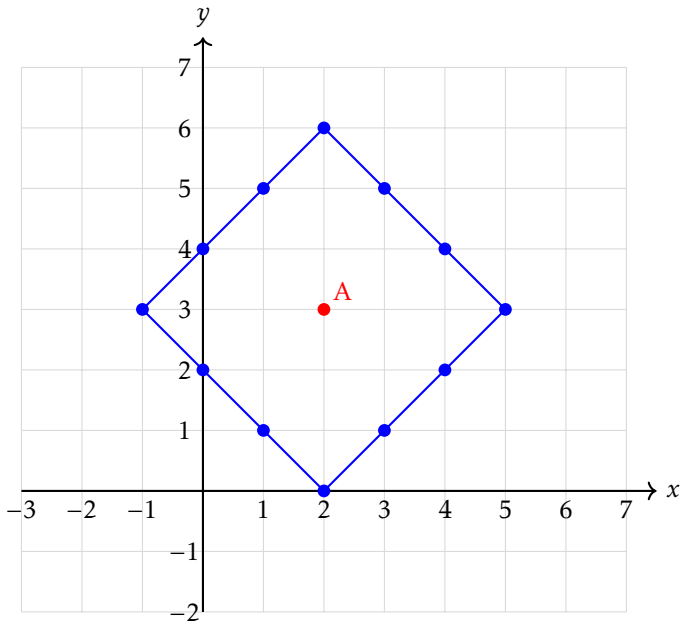


Figure n°4

b) **Médiatrice de Mathanan entre** $A(2,4)$ **et** $B(3,1)$ **:**
c) **Milieux de Mathanan entre** $A(2,4)$ **et** $B(3,1)$ **:**
Les milieux sont les points $(2,2)$ et $(3,3)$.

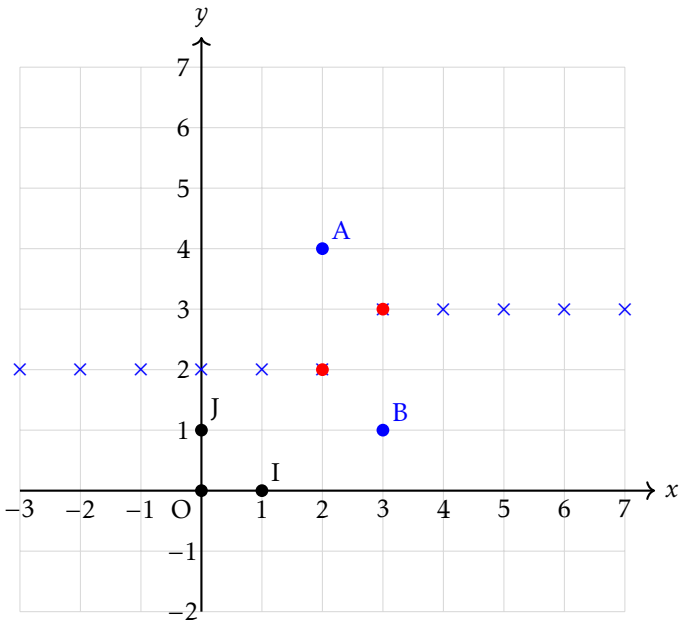


Figure n°5

Q5 : Expression algébrique de la distance :

Pour aller de $A(x_A, y_A)$ à $B(x_B, y_B)$, on doit parcourir au minimum $|x_B - x_A|$ déplacements horizontaux et $|y_B - y_A|$ déplacements verticaux.

Un chemin minimal est obtenu en effectuant d'abord tous les déplacements horizontaux (vers l'est ou l'ouest selon le signe de $x_B - x_A$), puis tous les déplacements verticaux (vers le nord ou le sud selon le signe de $y_B - y_A$), ou l'inverse.

La longueur de ce chemin est donc : $$d(A,B) = |x_B - x_A| + |y_B - y_A|.$$

Cette expression représente bien le nombre minimal de déplacements car on ne peut pas se rapprocher plus rapidement de la destination.

Q6 : Étude d'une intersection :

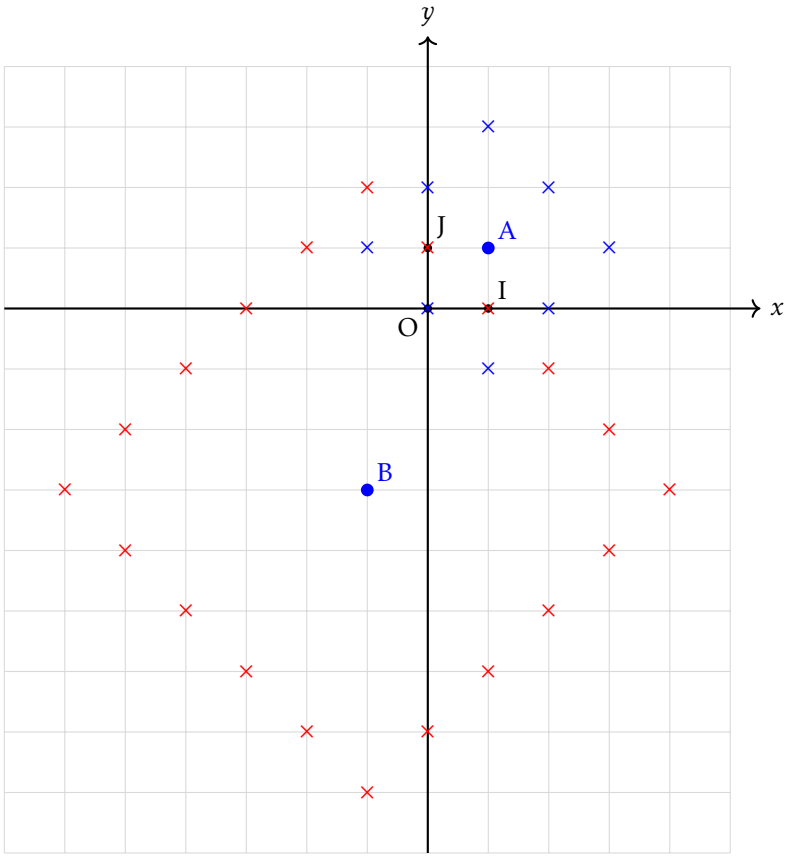
- $E_1 = \{M(x,y) \mid |x-1| + |y-1| = 2\}$ est un cercle de Mathanan de centre $C_1(1,1)$ et de rayon 2.
- $E_2 = \{M(x,y) \mid |x+2| + |y+4| = 5\}$ est un cercle de Mathanan de centre $C_2(-2,-4)$ et de rayon 5.

(a) Soit (x,y) un couple d'entiers tels que x et y ont même parité.
On a $|x+1|$ et $|y+3|$ sont des entiers naturels. Leur somme $|x+1| + |y+3|$ a la même parité que $(x+1) + (y+3) = x + y + 4$.
Comme x et y ont même parité, $x + y$ est pair, donc $x + y + 4$ est pair. Ainsi, $|x+1| + |y+3|$ est pair.
Or 5 est impair, donc $|x+1| + |y+3| \neq 5$.

(b) Supposons par l'absurde qu'il existe un point $M(x,y)$ dans $E_1 \cap E_2$. Alors :

$$|x-1| + |y-1| = 2 \quad \text{et} \quad |x+1| + |y+3| = 5.$$

x et y ont des parités différentes d'après la question précédente, alors $x-1$ et $y-1$ ont aussi des parités différentes. Mais comme $|x-1| + |y-1| = 2$, les seules possibilités sont $(|x-1|, |y-1|) = (0,2)$ ou $(2,0)$ ou $(1,1)$.
Dans tous les cas, $|x-1|$ et $|y-1|$ ont même parité, contradiction.
Dans tous les cas, on aboutit à une contradiction. Donc $E_1 \cap E_2 = \varnothing$.



Partie C : Milieux et cercles de Mathanan : une étude générale

Q7 : Milieux pour $d(\mathrm{A},\mathrm{B})$ impair :

$d(\mathrm{A},\mathrm{B})$ impair donc $\dfrac{d(\mathrm{A},\mathrm{B})}{2}$ n'est pas entier. Donc l'ensemble des milieux est vide.

Q8 : Cas $\mathrm{V}_x = 0$:

Si $\mathrm{V}_x = 0$, alors $x_\mathrm{A} = x_\mathrm{B}$. On a $d(\mathrm{A},\mathrm{B}) = \mathrm{V}_y = |y_\mathrm{B} - y_\mathrm{A}|$.
Comme $d(\mathrm{A},\mathrm{B})$ est pair par hypothèse, V_y est pair. Posons $\mathrm{V}_y = 2p$.
Considérons le point K de coordonnées $(x_\mathrm{A}, \dfrac{y_\mathrm{A}+y_\mathrm{B}}{2})$. Alors :

$$d(\mathrm{A},\mathrm{K}) = |x_\mathrm{A} - x_\mathrm{A}| + \left|\frac{y_\mathrm{A}+y_\mathrm{B}}{2} - y_\mathrm{A}\right| = \left|\frac{y_\mathrm{B}-y_\mathrm{A}}{2}\right| = p,$$

$$d(\mathrm{B},\mathrm{K}) = |x_\mathrm{B} - x_\mathrm{A}| + \left|\frac{y_\mathrm{A}+y_\mathrm{B}}{2} - y_\mathrm{B}\right| = \left|\frac{y_\mathrm{A}-y_\mathrm{B}}{2}\right| = p.$$

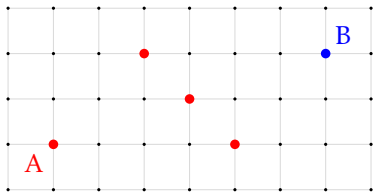
Donc $d(\mathrm{A},\mathrm{K}) = d(\mathrm{B},\mathrm{K}) = p = \dfrac{d(\mathrm{A},\mathrm{B})}{2}$, et K est un milieu.
De plus, il n'y a pas d'autres milieux car si $\mathrm{K}'(x',y')$ est un milieu, alors :

$$|x'-x_\mathrm{A}| + |y'-y_\mathrm{A}| = p \quad \text{et} \quad |x'-x_\mathrm{B}| + |y'-y_\mathrm{B}| = p.$$

Comme $x_\mathrm{A} = x_\mathrm{B}$, on a $|x'-x_\mathrm{A}| = |x'-x_\mathrm{B}|$, donc nécessairement $|y'-y_\mathrm{A}| = |y'-y_\mathrm{B}| = p$, ce qui force $y' = \dfrac{y_\mathrm{A}+y_\mathrm{B}}{2}$ et $x' = x_\mathrm{A}$.
Donc l'ensemble des milieux est réduit au singleton $\left\{\left(x_\mathrm{A}, \dfrac{y_\mathrm{A}+y_\mathrm{B}}{2}\right)\right\}$.

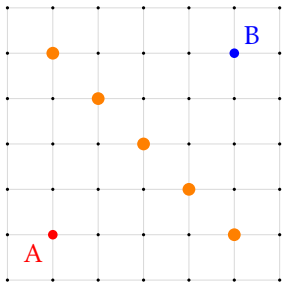
Q9 : Cas $\mathrm{V}_x > \mathrm{V}_y > 0$:

Notons $p = \dfrac{d(\mathrm{A},\mathrm{B})}{2} = \dfrac{\mathrm{V}_x+\mathrm{V}_y}{2}$. On a donc $\mathrm{V}_y < p < \mathrm{V}_x$.
Supposons $x_\mathrm{A} < x_\mathrm{B}$ et $y_\mathrm{A} < y_\mathrm{B}$ de telle sorte que $x_\mathrm{B} = x_\mathrm{A} + \mathrm{V}_x$
Posons $\mathrm{K}_1(x_\mathrm{B}-p; y_\mathrm{B})$. On a : $d(\mathrm{A},\mathrm{K}_1) = |x_\mathrm{A}-x_\mathrm{B}+p| + |y_\mathrm{A}-y_\mathrm{B}| = |x_\mathrm{A}-x_\mathrm{A}-\mathrm{V}_x+p| + \mathrm{V}_y = \mathrm{V}_x - p + \mathrm{V}_y = 2p - p = p$ et $d(\mathrm{B},\mathrm{K}_1) = |x_\mathrm{B}-x_\mathrm{B}+p| + |y_\mathrm{B}-y_\mathrm{B}| = p$ donc K_1 convient.
Posons $\mathrm{K}_2(x_\mathrm{A}+p; y_\mathrm{A})$. On a : $d(\mathrm{A},\mathrm{K}_2) = |x_\mathrm{A}-x_\mathrm{A}-p| + |y_\mathrm{A}-y_\mathrm{A}| = p$ et $d(\mathrm{B},\mathrm{K}_2) = |x_\mathrm{B}-x_\mathrm{A}-p| + |y_\mathrm{B}-y_\mathrm{A}| = |x_\mathrm{A}+\mathrm{V}_x-x_\mathrm{A}-p| + \mathrm{V}_y = \mathrm{V}_x - p + \mathrm{V}_y = 2p - p = p$ donc K_2 convient.
Il suffit de compter les points sur la diagonale $[\mathrm{K}_1;\mathrm{K}_2]$.
Il y en a $|x_{\mathrm{K}_2} - x_{\mathrm{K}_2}| + 1 = x_\mathrm{A} + p - x_\mathrm{B} + p + 1 = 2p - \mathrm{V}_x + 1 = \mathrm{V}_x + \mathrm{V}_y - \mathrm{V}_x + 1 = \mathrm{V}_y + 1$



Exemple : $V_x = 6$, $V_y = 2$, $d = 8$, $p = 4$
$V_y + 1 = 3$ milieux (en orange)

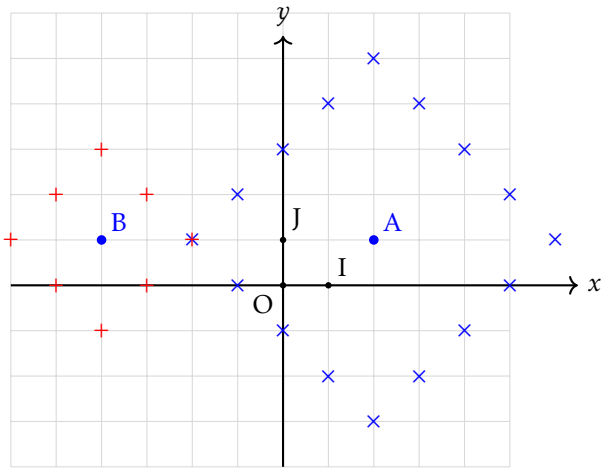
Q10 : Cas $V_x = V_y > 0$:
On a $d(A, B) = 2V_x = 2p$, donc $p = V_x = V_y$.
Prenons $K_1(x_B, y_A)$ alors on a $d(A, K_1) = |x_A - x_B| + |y_A - y_A| = V_x$ et $d(B, K_1) = |x_B - x_B| + |y_B - y_A| = V_y$ or $V_x = V_y$ donc $d(A, K_1) = d(B, K_1)$, K_1 est un centre.
De même pour $K_2(x_A, y_B)$ (le vérifier).
Par construction des coordonnées de K_1 et K_2, ces points sont symétriques par rapport à (AB). Il suffit de compter les points sur la diagonale $[K_1; K_2]$.
Il y en a $|x_{K_1} - x_{K_2}| + 1 = V_x + 1 = p + 1$

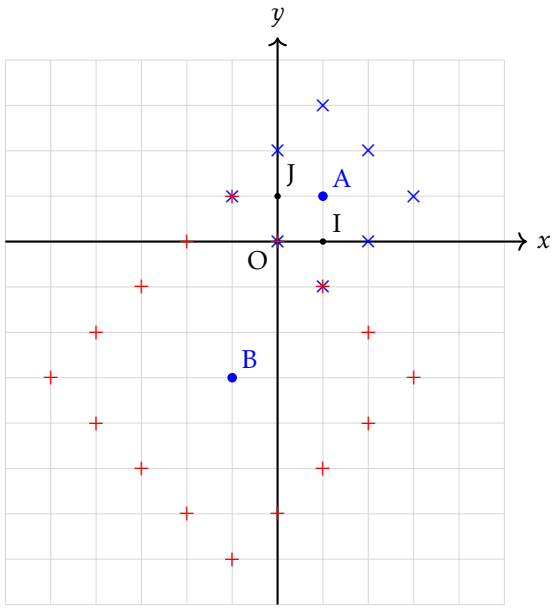


Exemple : $V_x = V_y = 4$, $d = 8$, $p = 4$
5 milieux (en orange)

Q11 : Intersection de deux cercles de Mathanan :

(a) Oui, si $d(A, B) = r_1 + r_2$, alors les deux cercles ont une intersection non vide. En effet, il existe au moins un point sur le chemin minimal de A à B qui est à distance r_1 de A et r_2 de B.





(b) Le nombre de points d'intersection dépend des valeurs de V_x, V_y, r_1 et r_2. (à finir)

Corrigé de l'exercice 3 : Des frises noires et blanches

Partie A

Q1 : Les quatre frises de longueur 5 avec des carreaux noirs aux positions 2, 4 et 5 :

Q2 : Les 10 carreaux noirs consécutifs forment un bloc unique. Ce bloc peut prendre 11 positions dans la frise de 20 carreaux (positions 1-10, 2-11, ..., 11-20). Donc 11 frises différentes.

Q3 : Choisir 3 positions parmi 5 pour les carreaux blancs : $\dfrac{5 \times 4 \times 3}{6} = 10$. Donc $\boxed{10}$ frises différentes.

Q4 : Une frise de longueur 3 : chaque carreau a 2 choix, soit $2^3 = 8$ possibilités. L'affirmation dit 6, donc elle est **fausse**.

Q5 : Pour chaque carreau, 2 choix indépendants. Donc $\boxed{2^n}$ frises différentes.

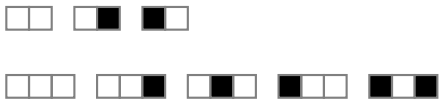
Partie B

Dans cette partie, on notera f_i le nombre de frises de longueur i.

Q6 : b-frises de longueur 2 et 3 :

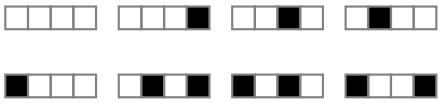
Longueur 2 :

Longueur 3 :



Nombre : $f_2 = 3$ b-frises de longueur 2, $f_3 = 5$ b-frises de longueur 3.

Q7 : (a) Toutes les b-frises de longueur 4 :



(b) Vérification : $f_2 = 3$, $f_3 = 5$, $f_4 = 8$. On a bien $f_2 + f_3 = 3 + 5 = 8 = f_4$.

Q8 : (a) Une b-frise de longueur $n + 2$ se terminant par un carreau noir doit avoir un carreau blanc en position $n + 1$ pour éviter deux noirs consécutifs. Les n premiers carreaux forment alors une b-frise de longueur n. Réciproquement, à toute b-frise de longueur n, on peut ajouter □■ à la fin pour obtenir une b-frise de longueur $n + 2$ se terminant par un carreau noir. Donc égalité.

(b) Démonstration : Une b-frise de longueur $n + 2$ peut :

- Se terminer par un carreau noir : il y en a f_n d'après (a)
- Se terminer par un carreau blanc : alors les $n + 1$ premiers forment une b-frise de longueur $n + 1$, il y en a f_{n+1}

Donc $f_{n+2} = f_n + f_{n+1}$.

Q9 : Calcul de f_8 : Suite définie par $f_1 = 2$, $f_2 = 3$, et $f_{n+2} = f_n + f_{n+1}$.

n	f_n
1	2
2	3
3	$2 + 3 = 5$
4	$3 + 5 = 8$
5	$5 + 8 = 13$
6	$8 + 13 = 21$
7	$13 + 21 = 34$
8	$21 + 34 = \boxed{55}$

Donc $\boxed{55}$ b-frises de longueur 8.

Q10 : Recherche de n tel que $f_n > 2025$:

n	f_n
9	89
10	144
11	233
12	377
13	610
14	987
15	1597
16	2584

Donc à partir de $\boxed{n = 16}$.

Partie C

Q11 : c-frises de longueur 1 et 2 :

Longueur 1 (3 c-frises) :

Longueur 2 (7 c-frises) :

Q12 : Notons g_n le nombre de c-frises de longueur n.

Analyse des transitions :

- Pour construire une c-frise de longueur $n+2$:

  (a) On peut mettre □□ en première colonne, de n'importe quelle c-frise de longueur $n+1$: g_{n+1} possibilités

  (b) On peut mettre □■ en première colonne, alors la deuxième colonne ne peut pas être □■ (car adjacence interdite). Donc ensuite une c-frise de longueur $n+1$ commençant par □□ ou ■□

  (c) On peut mettre ■□ en première colonne, alors la deuxième colonne ne peut pas être ■□. Donc ensuite une c-frise de longueur $n+1$ commençant par □□ ou □■

- Notons :

  a_{n+1} le nombre de c-frises de longueur $n+1$ commençant par □□.

  b_{n+1} le nombre de c-frises de longueur $n+1$ commençant par ■□.

  c_{n+1} le nombre de c-frises de longueur $n+1$ commençant par □■.

  On a $a_{n+1} + b_{n+1} + c_{n+1} = g_{n+1}$, $a_{n+1} = g_n$, et d'après (a), (b) et (c), $g_{n+1} = g_{n+1} + 2a_{n+1} + b_{n+1} + c_{n+1} = g_{n+1} + a_{n+1} + a_{n+1} + b_{n+1} + c_{n+1} = g_{n+1} + g_n + g_{n+1}$

- On trouve finalement : $g_{n+2} = 2g_{n+1} + g_n$

n	g_n
1	3
2	7
3	17
4	41
5	99
6	239
7	577
8	1793
9	3363