

Exercice n° 4 (Séries L, STG, F11)

Enoncé

Ce n'est pas gagné !

Je joue à pile ou face avec les règles suivantes :

Je commence avec une mise de $a = 1\text{€}$ et je ne m'arrête de jouer que dans les deux cas suivants :

- si je n'ai plus d'argent, alors j'ai perdu
- ou
- si j'ai $b = 5\text{€}$ et là j'ai gagné.

A) A chaque lancer : si j'ai deux euros, je les mise, et si j'ai plus, je mise la différence à 5€ et :

- si j'obtiens face, je récupère le double de ma mise,
- si j'obtiens pile, je perds ma mise.

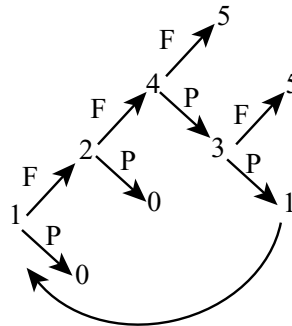
On appellera « avoir » la somme possédée après un lancer. On note (FPPF) la suite de résultats Face, Pile, Face, Face.

- 1) Je commence une partie avec (FP). Quel est mon avoir ?
 - 2) Même question avec (FFPP).
 - 3) Quel est le nombre minimum de lancers pour gagner ?
 - 4) Au bout de 2008 lancers, je n'ai toujours pas gagné ni perdu. Quel est mon avoir ?
- B) On change les règles en prenant $a = 1\text{€}$ et $b = 9\text{€}$ et à chaque lancer, si j'ai entre un et quatre euros, je les mise, et si j'ai plus, je mise la différence à 9€ .
- 1) Je commence une partie avec (FP). Quel est mon avoir ?
 - 2) Donner une suite de résultats pour laquelle l'avoir revient à 1€ .
 - 3) Au bout de 2008 lancers, je n'ai toujours pas gagné ni perdu. Quel est mon avoir ?
- C) J'arrive dans un lieu où une partie de ce type est en train de se dérouler, avec $a = 1\text{€}$ et b inconnu. Pendant ma présence, les avoirs successifs du joueur sont 10, 20 et 5.

- 1) Combien vaut b ?
- 2) A partir de ce moment (avoir de 5 euros), quels sont les avoirs possibles du joueur dans cette partie ?

Solution (P.L.H.)

A. Traçons l'arbre du jeu en précisant la fortune du joueur à chaque sommet. Les flèches montantes correspondent à Face, les descendantes à Pile.

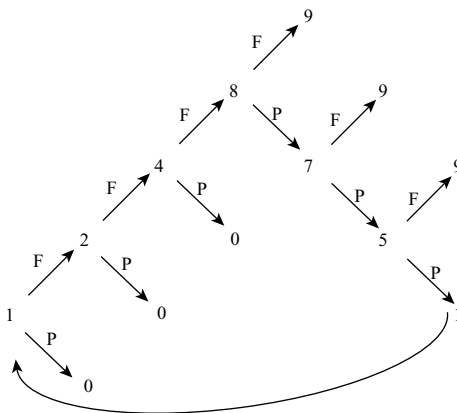


Arrivé à 5 ou 0, on s'arrête; arrivé à 1, on recommence à parcourir l'arbre de racine 1.

- 1) La suite FP m'amène à l'avoir 0.
- 2) La suite FFPP me ramène à l'avoir 1.
- 3) Pour atteindre 5 et gagner, il me faut au minimum 3 lancers (FFF).
- 4) Si je n'ai ni gagné ni perdu, c'est que je parcours la branche FFPP.

Je suis donc dans le même état tous les quatre lancers; comme 2008 est divisible par 4, je suis dans l'état de départ avec un avoir de 1.

B. L'arbre devient



- 1) Après FP mon avoir est nul.
- 2) FFFPPP me ramène à 1.
- 3) Je suis dans le même état tous les six lancers : $2008 = 2004 + 4$.

En 2004 je reviens à 1 et en 4 lancers je passe à 7. Mon avoir est donc de 7 au bout de 2008 lancers.

C.1) Si le joueur peut passer de 20 à 5, c'est qu'il a misé 15.
On a donc $b - 20 = 15$ et $b = 35$.

2) Les cinq boucles possibles sont :

1 → 2 → 4 → 8 → 16 → 32 → 29 → 23 → 11 → 22 → 9 → 18 ↓
←←←

3 → 6 → 12 → 24 → 13 → 26 → 17 → 34 → 33 → 31 → 27 → 19 ↓
←←←

5 → 10 → 20 ↓
←←←←←←←←

7 → 14 → 28 → 21 ↓
←←←←←←←←←←←←

15 → 30 → 25 ↓
←←←←←←←←←←

Si $a = 1$, on ne peut pas atteindre 5, 10 ou 20. Pour les atteindre il faut choisir $a = 5, 10$ ou 20.