∾ Baccalauréat C Orléans-Tours juin 1981 ∾

EXERCICE 1

On note $\overline{x}$ la classe d'un entier naturel x selon la relation de congruence modulo 10.

1. Expliciter l'ensemble C des classes des entiers n^2 quand n décrit l'ensemble $\mathbb{N}$ des naturels.
2. Déterminer le plus petit entier naturel n_0 tel que pour tout entier n supérieur ou égal à n_0 on ait

$$\overline{(n!)} = \overline{0}.$$

(On rappelle que pour tout entier naturel n non nul $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$ et que $0! = 1$).

3. Pour n entier non nul on pose $u_n = 1! + 2! + 3! + \cdots + n!$.
Déterminer l'ensemble D des entiers naturels n tels que u_n soit un carré parfait.

EXERCICE 2

1. Soit φ la fonction numérique d'une variable réelle définie par

$$\varphi(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x}.$$

   a. Déterminer l'ensemble de définition de φ.
   b. Étudier la continuité et la dérivabilité de φ sur son ensemble de définition.
   Étudier $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \dfrac{\varphi(x) - \varphi(1)}{x - 1}$.
   Interpréter geométriquement le résultat obtenu.

2. a. Montrer qu'il existe une fonction f définie et continue sur $[-1~;~1]$ et telle que

$$\forall x \in [-1~;~0[\cup]0~;~1], \quad f(x) = \varphi(x).$$

   b. Cette fonction f est-elle dérivable en 0 ?

3. Étudier et représenter graphiquement les variations de la fonction f sur l'intervalle $[-1~;~1]$.
On précisera en particulier fG

PROBLÈME

Soit E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3.
Soit $\mathcal{B} = \left(\vec{\imath}, ~\vec{\imath}, ~\vec{k}\right)$ une base orthonormée directe de E.
Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs, on notera $D_{\vec{u}}$ la droite vectorielle de base $\vec{u}$, $P_{(\vec{u}~;~\vec{v})}$ le plan vectoriel de base $\left(\vec{u}, ~\vec{v}\right)$.

Partie A

1. Quelle est l'image de la base $\mathcal{B}$ par la projection orthogonale sur $P_{(\vec{u}~;~\vec{v})}$? On notera p cette projection.
2. On considère le plan vectoriel $P_{(\vec{\imath},~\vec{k})}$ orienté par $\vec{\jmath}$.

a. Montrer que la base $\left(\overrightarrow{k},\ \overrightarrow{\imath}\right)$ de ce plan est alors orientée dans $P_{\left(\overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{k}\right)}$.

b. Déterminer la matrice dans $\left(\overrightarrow{k},\ \overrightarrow{\imath}\right)$ de la rotation vectorielle p_α de ce plan, de mesure α en radians (α étant un réel de $[0\ ;\ \pi]$.
Exprimer, en fonction de $\overrightarrow{\imath}$ et $\overrightarrow{k}$, les images des vecteurs $\overrightarrow{\imath}$ et $\overrightarrow{k}$ par cette rotation vectorielle.

c. En déduire l'image de la base $\mathscr{B}$ par la rotation vectorielle r_α de E, d'axe $D_{\overrightarrow{jmath}}$ orienté par $\overrightarrow{jmath}$ et de mesure α en radians.

3. Soit Q_α l'image du plan vectoriel $P_{\left(\overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)}$ par la rotation vectorielle r_α.

a. Déterminer la base de Q_α, image de $\left(\overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$ par la rotation vectorielle r_α. $r_\alpha\left(\overrightarrow{\imath}\right)$ sera noté $\overrightarrow{u}$.

b. Déterminer l'image de la base $\mathscr{B}$ par q, projection vectorielle orthogonale de E sur Q_α.

c. Vérifier que $r_\alpha \circ p = q \circ r_\alpha$.

d. Montrer que dans la base $\mathscr{B}$, le vecteur de composantes $(x\ ;\ y\ ;\ z\ )$ a pour image par $q \circ p$ le vecteur de composantes $\left(x\cos^2\alpha\ ;\ y\ ;\ -x\cos\alpha\sin\alpha\right)$.

4. Soit $\overrightarrow{u}$ le vecteur défini en 3. a.

a. Montrer que $(q\circ p)\left(\overrightarrow{u}\right) = \left(\cos^2\alpha\right)\cdot\overrightarrow{u}$.

b. Discuter selon les valeurs de α la nature de l'application

$$h:\quad \begin{array}{ccc} D_{\overrightarrow{u}} & \to & D_{\overrightarrow{u}} \\ \overrightarrow{x} & \longmapsto & (q\circ p)\left(\overrightarrow{x}\right). \end{array}$$

c. Montrer que l'image, par $q\circ p$, du plan vectoriel Q_α est incluse dans Q_α.

5. **a.** Déterminer, dans la base $\left(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$, la matrice de l'application linéaire

$$f:\quad \begin{array}{ccc} Q_\alpha & \to & Q_\alpha \\ \overrightarrow{x} & \longmapsto & (q\circ p)\left(\overrightarrow{x}\right). \end{array}$$

b. Déterminer la valeur de α pour laquelle f n'est pas bijective. Que peut-on dire alors de $P_{\left(\overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)}$ et Q_α ?

Partie B

Soit $\mathscr{E}$ un espace affine associé à E et rapporté à un repère orthonormé direct $\mathscr{B} = \left(\mathrm{O}\ ;\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath},\ \overrightarrow{k}\right)$. Soit $\overline{Q_\alpha}$ le plan affine de direction Q_α et contenant le point O.
Soit φ l'application de $\mathscr{E}$ qui au point M de coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ dans $\mathscr{B}$ fait correspondre le point M' de coordonnées $\left(x'\ ;\ y'\ ;\ z'\right)$ dans $\mathscr{B}$ telles que

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & x\cos^2\alpha \\ y' & = & y \\ z & = & -x\cos\alpha\sin\alpha \end{array}\right. \qquad \text{avec } \alpha \in [0\ ;\ \pi],\ \alpha \neq \frac{\pi}{2}$$

1. Montrer que l'image de $\overline{Q_\alpha}$ par l'application φ est contenue dans $\overline{Q_\alpha}$.

2. Soit ψ l'application

$$\left\{\begin{array}{ccc}\overline{Q_\alpha} & \to & \overline{Q_\alpha}\\ M & \longmapsto & \varphi(M).\end{array}\right.$$

Quelle est l'expression analytique de ψ dans le repère $\left(\text{O}~;~\overrightarrow{u},~\overrightarrow{\jmath}\right)$ où

$\overrightarrow{u} = \cos\alpha\,\overrightarrow{\imath} - \sin\alpha\,\overrightarrow{k}$?

3. Soit $\mathscr{C}$ la courbe du plan $\overline{Q_\alpha}$ dont les points M, de coordonnées $(x~;~y)$ dans le repère $\left(\text{O}~;~\overrightarrow{u},~\overrightarrow{\jmath}\right)$ vérifient

$$9x^2 - 18x + 16y^2 - 32y - 56 = 0.$$

Quelle est la nature de $\mathscr{C}$?

Donner le centre et les mesures des axes.

4. Déterminer dans $\left(\text{O}~;~\overrightarrow{u},~\overrightarrow{\jmath}\right)$ une équation de $\psi(\mathscr{C})$.

Quelle est la nature de $\psi(\mathscr{C})$?

Donner le centre par ses coordonnées et préciser selon les valeurs de α la mesure du grand axe.

Déterminer les valeurs de α pour lesquelles $\psi(\mathscr{C})$ est un cercle dont on précisera le rayon.