Durée : 4 heures

Baccalauréat C juin 1982 Orléans-Tours

EXERCICE 1 **4 points**

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$, corps des nombres complexes, l'équation (1)

$$(1) \qquad 2(1+\mathrm{i})z^2+2(a+\mathrm{i})z+\mathrm{i}a(1-\mathrm{i})=0$$

où z est l'inconnue complexe et a un paramètre réel.

2. À tout nombre complexe z, on associe dans le plan affine euclidien rapporté au repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}\,;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$ le point M d'affixe z.

Déterminer l'ensemble E des points, images des solutions de l'équation (1), quand a décrit $\mathbb{R}$.

3. Quel est l'ensemble transformé de l'ensemble E par la similitude directe plane S, de centre $\mathrm{I}\left(-\frac{1}{2}\,;\,-\frac{1}{2}\right)$, d'angle $\frac{\pi}{4}$, de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$?

EXERCICE 2 **4 points**

$\mathcal{E}$ est un espace affine euclidien orienté de dimension 3, rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}\,;\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath},\ \overrightarrow{k}\right)$.

On appelle $\mathcal{C}$ le cube de sommets : O, A, B, C, D, E, F, G, défini par

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\jmath},\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\imath}+\overrightarrow{\jmath},$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\overrightarrow{\mathrm{CG}}=\overrightarrow{\mathrm{BF}}=\overrightarrow{k}.$$

1. Dessiner $\mathcal{C}$; soit r_1 la rotation de $\mathcal{E}$, d'axe (OA) dirigé par $\overrightarrow{\imath}$, dont une mesure de l'angle est $+\frac{\pi}{2}$; soit r_2 la rotation de $\mathcal{E}$, d'axe (OC) dirigé par $\overrightarrow{\jmath}$, dont une mesure de l'angle est $-\frac{\pi}{2}$.

On pose $f=r_2\circ r_1$ et $g=r_1\circ r_2$.

Montrer que f et g sont des relations de $\mathcal{E}$, définies par

$$f:\ \begin{array}{ccc}\mathcal{E} & \to & \mathcal{E}\\ M\left|\begin{array}{l}x\\y\\z\end{array}\right. & \longmapsto & f(M)\left|\begin{array}{l}-y\\-z\\x\end{array}\right.\end{array} \qquad g:\ \begin{array}{ccc}\mathcal{E} & \to & \mathcal{E}\\ M\left|\begin{array}{l}x\\y\\z\end{array}\right. & \longmapsto & g(M)\left|\begin{array}{l}-z\\-x\\y\end{array}\right.\end{array}$$

(On ne cherchera ni l'axe ni l'angle de chacune des rotations f et g).

2. On note A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1, G_1, les images respectives par f des points A, B, C, D, E, F, G, et A_2, B_2, C_2, D_2, E_2, F_2, G_2, les images respectives par g des points A, B, C, D, E, F, G.

Montrer que $\{\mathrm{A}_1, \mathrm{B}_1, \mathrm{C}_1, \mathrm{D}_1, \mathrm{E}_1, \mathrm{F}_1, \mathrm{G}_1\}=\{\mathrm{A}_2, \mathrm{B}_2, \mathrm{C}_2, \mathrm{D}_2, \mathrm{E}_2, \mathrm{F}_2, \mathrm{G}_2\}$

3. On pose $\varphi=g\circ f^{-1}$. Quelle est l'image $\mathcal{C}_2$ par φ de la liste ordonnée de points $\mathcal{C}_1=(\mathrm{A}_1, \mathrm{B}_1, \mathrm{C}_1, \mathrm{D}_1, \mathrm{E}_1, \mathrm{F}_1, \mathrm{G}_1)$?

Montrer que φ est une rotation dont on précisera l'axe.

PROBLÈME **4 points**

Partie A

Soit f la fonction numérique d'une variable réelle définie par

$$x \longmapsto f(x) = x\mathrm{Log}\left|1 + \frac{1}{x}\right|$$

où Log désigne la fonction logarithme népérien de base e.

1. Préciser l'ensemble de définition D_f de f ; étudier la continuité et la dérivabilité de f, en énonçant les théorèmes utilisés.
2. **a.** Étudier la dérivabilité de f', fonction dérivée de f, et en déduire les variations de f',.

   b. Soit F la restriction de f' à l'intervalle $\mathrm{I} =]-1\,;\,0[$.
   Démontrer que F est une bijection de I sur un intervalle à préciser. En déduire que dans I, l'équation $f'(x) = 0$ admet une solution unique, notée a ; on ne cherchera pas à calculer a, mais on montrera que $a > 2$.

   c. Calculer $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f'(x)$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f'(x)$.

   d. Des résultats précédents, déduire le signe de $f'(x)$ pour $x \in \mathrm{D}_{f'}$ et les variations de f.
3. Déterminer les limites de f aux bornes des intervalles de $\mathrm{D}_{f'}$ (on pourra utiliser le changement de variable $X = \dfrac{1}{x}$).
4. Pour une étude locale de f au voisinage de zéro, on adoptera le plan suivant :
   Soit h la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$h:\ \begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x \neq 0 & \longmapsto & h(x) = f(x) \\ 0 & \longmapsto & h(0) = 0. \end{array}$$

   a. Démontrer que h est le prolongement par continuité de f en zéro.

   b. Étudier la dérivabilité de h en zéro.

Conclusion de la partie A : Donner le tableau de variations de f et construire la courbe $(\mathscr{C})$ représentative de f dans P plan affine euclidien muni du repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$, en précisant l'intersection de $(\mathscr{C})$ avec l'axe des abscisses.

Partie B

P est le plan affine euclidien muni du repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$. Soit s l'application de P dans P définie par

$$s:\ \begin{array}{lcl} \mathrm{P} & \to & \mathrm{P} \\ M\left|\begin{array}{l} x \\ y \end{array}\right. & \longmapsto & s(M) = M'\left|\begin{array}{lcl} x' & = & -x-1 \\ y' & = & y \end{array}\right. \end{array}$$

1. Déterminer la nature et les points invariants de s.
2. Soit $(\mathscr{C}')$ l'image de $(\mathscr{C})$ par s, $(\mathscr{C})$ étant la courbe représentative dans P de la fonction f étudiée dans la partie A. Construire $(\mathscr{C}')$ dans le même repère que $(\mathscr{C})$.
   Soit g la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ admettant $(\mathscr{C}')$ comme courbe représentative dans le repère $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$. Calculer $g(x)$ et préciser D_g ensemble de définition de g.
3. Résoudre algébriquement dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = g(x)$.

Partie C

1. Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}^{\star}$, $f(n) < 1 < g(n)$.
En déduire l'encadrement suivant de e :

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} < \mathrm{e} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Préciser cet encadrement pour $n = 1$. Soit $\ell(n)$ la largeur de cet encadrement c'est-à-dire

$$\ell(n) = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}.$$

Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^{\star}$, $\ell(n)$ est majoré par $\dfrac{4}{n}$ et minoré par $\dfrac{2}{n}$.

2. Donner un rang à partir duquel l'encadrement ci-dessus de e permet d'obtenir une valeur approchée de e à 10^{-3} près, c'est-à-dire

$$\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} - \mathrm{e}\right| < 10^{-3}.$$