Baccalauréat C Orléans–Tours septembre 1973

EXERCICE 1

Soit f la fonction numérique définie par

$$f(x) = \text{Log}\left(2x + \sqrt{4x^2+1}\right).$$

1. Déterminer le domaine de définition de f et montrer que cette fonction est impaire.
   Étudier le sens de variation de f et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé.
2. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
   Déterminer f^{-1} et donner sa représentation graphique dans le même repère.
   Calculer l'aire de la partie de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ définie par

$$\left\{\begin{array}{ccccc} 0 & \leqslant & x & \leqslant & \dfrac{\text{e}^2-1}{4\text{e}}\\ 0 & \leqslant & y & \leqslant & f(x)\end{array}\right.$$

EXERCICE 2

Soit θ un nombre réel tel que $-\dfrac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\pi}{2}$.
Résoudre dans le corps des complexes l'équation

$$(1+\cos 2\theta)z^2 - (2\sin 2\theta)z + 2 = 0.$$

Déterminer le module et l'argument des racines de cette équation.

EXERCICE 3

Partie A

Soit E un plan vectoriel muni de la base $\mathcal{B} = \left(\overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$. Soit F l'ensemble des endomorphismes f de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est de la forme

$$\begin{pmatrix} a+1 & a\\ b & b+1\end{pmatrix}, \quad (a\,;\,b) \in \mathbb{R}^2.$$

1. Exprimer, sous forme d'une relation entre a et b, la condition nécessaire et suffisante pour que f soit un automorphisme de E.
   Montrer que l'ensemble de ces automorphismes est un sous-groupe du groupe linéaire de E.
2. Pour tout réel λ, on définit

$$E_\lambda = \left\{\overrightarrow{u} \in \text{E tels que } f\left(\overrightarrow{u}\right) = \lambda\overrightarrow{u}\right\}.$$

   a. Montrer que E_λ est un sous-espace vectoriel de E.

   b. Trouver la condition que doivent vérifier a et b pour qu'il existe deux valeurs distinctes, λ_1 et λ_2 telles que E_{λ_1} et E_{λ_2} ne soient pas réduits à $\left\{\overrightarrow{0}\right\}$.
   (On appellera λ_1 la valeur indépendante de a et de b.)
   Déterminer E_{λ_1} et E_{λ_2} et montrer qu'ils sont supplémentaires dans E.

c. Soit $\overrightarrow{u_1} = \overrightarrow{\imath} - \overrightarrow{\jmath}$ et $\overrightarrow{u_1} = a\,\overrightarrow{\imath} + b\,\overrightarrow{\jmath}$.
La condition précédente étant remplie, montrer que $\left(\overrightarrow{u_1},\ \overrightarrow{u_2}\right)$ est une base de E.
Quelle est la matrice de f dans cette base ?
Soit A' cette matrice, calculer $(A')^n$.

3. On suppose $a+b=-1$. Trouver le noyau de f, noté Ker f, et l'image de f. notée Im f.
Montrer que f est la projection sur E_{λ_1}, parallèlement à E_{λ_2}.

Partie B

Soit A une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} a+1 & a \\ b & b+1 \end{pmatrix},$$

on suppose en outre $a>0$ et $b>0$. On lui associe l'application S :

$$S : \mathbb{R} - \left\{\frac{b+1}{b}\right\} bt1 \to \mathbb{R}$$

définie par

$$S(x) = \frac{(a+1)x+a}{bx+(b+1)}.$$

1. Montrer que S a deux points invariants, -1 et $\dfrac{a}{b}$.

2. Soit $\overline{S}$ la restriction de S à $\left]-1\ ;\ \dfrac{a}{b}\right[$.
Montrer que $\overline{S}$ est une bijection de $\left]-1\ ;\ \dfrac{a}{b}\right[$ dans lui-même.

3. Vérifier que l'application U définie par $U(x) = \dfrac{ax+a}{-ax+b}$ est une bijection de $]-\infty\ ;\ 0[$ dans $\left]-1\ ;\ \dfrac{a}{b}\right[$.
Déterminer son application réciproque U^{-1}.
Exprimer $V = U^{-1} \circ \overline{S} \circ U$.

4. Soit x_0 un élément de $\left]-1\ ;\ \dfrac{a}{b}\right[$, on considère la suite

$$x_1 = \overline{S}(x_0)\,, x_2 = \overline{S}(x_1)\,, \ldots, x_n = \overline{S}(x_{n-1})\,.$$

Posons $y_n = U^{-1}(x_n)$· Montrer que $y_n = V\left(y_{n-1}\right)$.
En déduire la valeur de y_n en fonction de y_0, puis la valeur de x_n en fonction de x_0.
Quelle est la limite de la suite (x_n) quand n tend vers l'infini ?