∽ Baccalauréat C Orléans–Tours septembre 1980 ∾

EXERCICE 1

1. Trouver, suivant les valeurs de l'entier naturel n, le reste de la division de 5^n par 7 ainsi que le reste de la division de 5^n par 11.
2. Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tels que

$$5^n \equiv 4 \quad [77].$$

3. Quel est le reste de la division de 5^{160} par 77 ?

EXERCICE 2

Log désigne la fonction logarithme népérien.
Soit f la fonction de la variable réelle x définie par 1

$$f(x) = \frac{1}{4x(\text{Log}x)^2}$$

1. Étudier les variations de f [pour étudier la limite de f lorsque x tend vers 0 on admettra que : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} x(\text{Log}x)^2 = 0$].
2. Donner l'allure de la courbe représentative de f dans un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$. (Unité : 5 cm; on prendra 0,1 et 7,4 pour valeurs approchées de $\dfrac{1}{\text{e}^2}$ et e^2).
3. **a.** Calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\text{Log}x}$ sur son ensemble de définition.

   b. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Calculer

$$I_n = \int_{\text{e}}^{\text{e}^2} f(x)\,\text{d}x.$$

   Trouver $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$.

PROBLÈME

Soit P un plan affine euclidien orienté rapporté à un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = \left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$. On rappelle que l'affixe d'un point M de coordonnées $(x~;~y)$ est le nombre complexe $z = x + \text{i}y$.
On donne des réels r et α avec $r > 0$ et $\alpha = \dfrac{5\pi}{4}$ et on note u le nombre complexe de module r, d'argument α.

1. On construit les points A_n de P répondant aux conditions :
   - A_0 est l'origine du repère;
   - A_1 est le point d'affixe i;
   - pour tout entier n supérieur ou égal à 2, le point A_n est l'image de A_{n-2} par la similitude directe de centre A_{n-1} de rapport r, dont une mesure de l'angle est α.

   On note z_n l'affixe du point A_n.

a. Écrire pour tout entier n supérieur ou égal à 2 une relation entre z_n, z_{n-1} et z_{n-2}.

b. Montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a

$$z_n - z_{n-1} = (-u)^{n-1}\mathrm{i}.$$

c. Déterminer l'expression de l'affixe z_n de A_n en fonction de n et de u.

2. a. Montrer qu'il existe une similitude directe S et une seule telle que

$$A_1 = S(A_0) \quad \text{et} \quad A_2 = S(A_1).$$

Préciser les éléments caractéristiques de S.

b. Montrer que pour tout entier naturel n, on a $A_{n+1} = S(A_n)$.
On note S^0 l'application identique de P, et pour tout entier naturel n. on pose $S^{n+1} = S \circ S^n$.
Soit $p \in \mathbb{N}$; montrer que : .

$$\forall n \in \mathbb{N}, A_{n+p} = S^n\left(A_p\right).$$

c. Montrer que S^4 est une homothétie.

d. En déduire que les points A_n sont éléments d'un ensemble formé par la réunion de quatre droites que l'on précisera.

3. On suppose maintenant $r = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. On appelle Ω le centre de la similitude S.

a. Démontrer que pour tout entier naturel n, les vecteurs $\overrightarrow{\Omega A_{n+1}}$ et $\overrightarrow{A_n A_{n+1}}$ sont orthogonaux.

b. Représenter graphiquement les points $A_0, A_1, A_2, \dots, A_9$ dans le repère orthonormé $\left(\mathrm{O} ; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$ (unité 4 cm).

c. Calculer $\left\|\overrightarrow{\Omega A_{n+1}}\right\|$ en fonction de n et de $\left\|\overrightarrow{\Omega A_0}\right\|$. En déduire

$$\lim_{n \to +\infty} \left\|\overrightarrow{\Omega A_0}\right\|.$$

d. Pour tout entier n, calculer $L_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \left\|\overrightarrow{A_i A_{i+1}}\right\|$. Étudier la limite de la suite (L_n) quand n tend vers $+\infty$.

4. On suppose toujours que u est de module $r\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et d'argument $\alpha = \dfrac{5\pi}{4}$.

a. Vérifier que la similitude directe S est l'application de P dans P qui au point M d'affixe $x + \mathrm{i}y$ associe le point M$'$ d'affixe $x' + \mathrm{i}y'$ tel que :

$$\left\{\begin{array}{l c l} x' & = & \dfrac{1}{2}(x - y) \\ y' & = & \dfrac{1}{2}(x + y) + 1. \end{array}\right.$$

b. Soit Γ la courbe du plan P dont une équation dans $\mathcal{R}$ est $xy = -1$.
Déterminer une équation de l'image Γ' de Γ par S. Préciser la nature de Γ'.

c. Tracer les courbes Γ et Γ' dans le repère $\mathcal{R}$ (sur le même dessin)