Durée : 4 heures

Baccalauréat C Orléans juin 1970

EXERCICE 1

Résoudre, sur le corps des réels, l'équation

$$\left(x^2-1\right)\mathrm{e}^{\mathrm{Log}(x-2)}=\mathrm{Loge}^{(x+1)},$$

où Log désigne le logarithme népérien.

EXERCICE 2

Déterminer $n (n \in \mathbb{N})$ tel que la fraction

$$\frac{n^2+3}{n+2}$$

soit réductible.
Déterminer n tel que cette fraction soit égale à un entier naturel.

EXERCICE 3

1. Démontrer que le polynôme

$$Z^2+2(2+\mathrm{i})Z+3+4\mathrm{i},$$

   où Z est un nombre complexe, est le carré d'un polynôme du premier degré.
2. On considère, sur le corps des complexes, l'équation en U

$$\text{(E)}\qquad U^2-2(Z+4)U+2Z^2+2(6+\mathrm{i})Z+19+4\mathrm{i}=0,$$

   où Z est un paramètre appartenant lui-même à l'ensemble des complexes.
   a. Déterminer Z pour que cette équation ait une racine double.
   b. Déterminer les deux solutions de (E) dans le cas général ; on pourra appeler U' et U'' ces deux solutions.
   c. Déterminer l'ensemble des Z tels que Z soit lui-même une des solutions de l'équation (E).
3. Dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$, à tout point de coordonnées $(x\ ;\ y) \in \mathbb{R}^2$, on associe le nombre complexe $x+\mathrm{i}y$ dont il est l'image.
   Soit Z et U deux nombres complexes, M l'image de Z et P l'image de U. On dira que M et P vérifient la relation $\mathscr{R}$ et l'on écrira $M\mathscr{R}P$ si, et seulement si, U est une racine de l'équation (E) correspondant à la valeur Z du paramètre.
   Démontrer que

$$M\mathscr{R} \iff \left\{\begin{array}{lcl} P & = & \mathscr{S}'(M) \\ \text{ou} & & \\ P & = & \mathscr{S}''(M)\end{array}\right.$$

   $\mathscr{S}'$ et $\mathscr{S}''$ étant des transformations ponctuelles planes, respectivement définies par

$$U'=Z(1+\mathrm{i})+3+2\mathrm{i}\quad \text{et}\quad U''=Z(1-\mathrm{i})+5-2\mathrm{i},$$

   que l'on caractérisera géométriquement, soit directement, soit en s'aidant du 2.

4. **a.** Pour un point M donné, on pose $P' = \mathscr{S}'(M)$ et $P'' = \mathscr{S}''(M)$.

Quelle est la transformation ponctuelle fixe $\mathscr{S}$ permettant de passer de P' à P'' ?

Caractériser $\mathscr{S}$ géométriquement.

b. Soit I le milieu de $P'P''$. On pose $\mathrm{I} = \mathscr{T}(M)$.

Montrer que $\mathscr{T}$ est une translation.

En déduire une construction simple de l'ensemble

$$\{P | M\mathscr{R}P\}, \text{ le point } M \text{ étant donné,}$$

puis de l'ensemble

$$\{M | M\mathscr{R}P\}, \text{ le point } P \text{ étant donné,}$$

c. Déterminer l'ensemble des points M tels que M, P' et P'' soient alignés.

Quel est alors l'ensemble des points P' et l'ensemble des points P'' ?