∽ Baccalauréat C Orléans septembre 1970 ∽

EXERCICE 1

Déterminer le nombre entier du système décimal qui s'écrit $\overline{abca}$, dans le système à base onze et $\overline{bbac}$, dans le système à base sept.

EXERCICE 1

Étudier les variations de la fonction, f, de la variable réelle x définie par

$$y = f(x) = 2\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{2x}.$$

Tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé. On précisera la pente de la tangente au point où la courbe coupe l'axe des abscisses.

EXERCICE 3

On donne un plan (P) rapporté au repère orthonormé d'axes $x'\mathrm{O}x$, $y'\mathrm{O}y$. On considère la transformation plane, T, qui, au point m de coordonnées x et y, associe le point M dont les coordonnées X et Y sont définies par

$$\left\{\begin{array}{lcl} X & = & x + y,\\ Y & = & x - y.\end{array}\right.$$

On écrit $M = T(m)$.

1. **a.** Démontrer que cette transformation T réalise une application bijective de (P) dans (P).

   b. La transformation T admet-elle des points doubles ? La transformation T est-elle involutive ?

2. On établit une correspondance bijective entre les points de (P) et l'ensemble des nombres complexes. Au point $m(x~;~y)$, on associe $z = x + \mathrm{i}y$.
   Soit $Z = X + \mathrm{i}Y$ l'affixe de M.

   a. Si $\overline{z}$ désigne le nombre complexe conjugué de z, démontrer que $Z = (1 + i)z$.

   b. On donne deux points m et m' distincts. On pose $M = T(m)$ et $M' = T\left(m'\right)$. Soit d la distance entre m et m', D la distance entre M et M'. Calculer $\dfrac{D}{d}$.

   c. Calculer la somme des deux angles polaires

   $$\left(\overrightarrow{\mathrm{O}x}, \overrightarrow{mm'}\right) \quad \text{et} \quad \left(\overrightarrow{\mathrm{O}x}, \overrightarrow{MM'}\right).$$

   d. Démontrer que la transformation T est le produit d'une symétrie axiale, que l'on précisera, et d'une homothétie de rapport positif.
   Ce produit est-il commutatif ?

3. On pose $T2 = T \circ T$. Étudier T^2.
   On définit la suite d'applications T^n par récurrence à l'aide de la relation

   $$T^n = T \circ T^{n-1}, \quad n \geqslant 2.$$

   Soit m un point de (P). On posera $M_1 = T(m)$, puis, pour tout n supérieur ou égal à 2, $M_n = T^n(m)$.

Construire M_1, M_2 et M_3. Démontrer que l'ensemble des points M_n est inclus dans la réunion de deux droites. Ces deux droites sont-elles distinctes quel que soit m ?

4. On considère l'hyperbole équilatère (h) d'équation

$$x^2 - y^2 = 4$$

et la droite (δ) d'équation $3x - y - 9 = 0$, qui coupe (h) en b et en c.

a. Déterminer et construire les figures (H) et (Δ) transformées de (h) et de (δ) par T.

b. On suppose maintenant que m se déplace dans le domaine fermé (σ) limité par le segment bc et la courbe (h). Quel est le domaine $(\sum)$ décrit par M ?

c. Calculer l'aire de $(\sum)$.

d. En admettant que l'on peut étendre aux domaines (σ) et $(\sum)$ le résultat relatif au rapport des aires de deux polygones semblables, déduire l'aire du domaine (σ).