☙ Baccalauréat C Orléans–Tours juin 1973 ❧

EXERCICE 1

Soit $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ l'ensemble des classes d'entiers modulo 4 :

$$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} = \{\dot{0}, \dot{1}, \dot{2}, \dot{3}\}$$

1. Rappeler la structure de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$
2. Résoudre dans cet ensemble le système

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dot{3}x + y & = & \dot{3} \\ x + y & = & \dot{1} \end{array}\right.$$

EXERCICE 2

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\left\{\begin{array}{lcll} f(0) & = & 0 & \\ f(x) & = & \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \end{array}\right.$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est dérivable en tout point x non nul. Calculer $f'(x)$.
3. À l'aide de la définition, montrer que f est dérivable au point $x = 0$.
4. Étudier le sens de variation de f et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

N.B. : Pour la construction de la courbe, on utilisera le tableau des valeurs approchées suivantes :

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{4}{9}$	1	$\frac{3}{2}$	4
e^{-x}	0,78	0,60	0,37	0,22	0,02

PROBLÈME

Soit $\mathscr{F}$ l'ensemble des fonctions numériques f définies pour tout x réel par :

$$f(x) = a\cos 2x + b\sin 2x + c \quad \text{où } a, b, \text{ et } c \text{ décrivent } \mathbb{R}.$$

Partie A

1. a. Montrer que $\mathscr{F}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions numériques définies sur R.

   b. Soient f_1, f_2, f_3 les trois éléments de $\mathscr{F}$ définis par :

   $$f_1(x) = \cos 2x; \quad f_2(x) = \sin 2x; \quad f_3(x) = 1.$$

   Montrer que $\{f_1, f_2, f_3\}$ constitue une base de $\mathscr{F}$, notée $\mathscr{B}$.
2. a. Montrer que tout élément f de $\mathscr{F}$ est intégrable sur $[0 ; \pi]$.

   Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi} f_i(x) f_j(x)\,\mathrm{d}x$ pour $i \in \{1;2;3\}$ et $j \in \{1;2;3\}$.

b. Soient f et g deux éléments de $\mathcal{F}$ de composantes respectives (a, b, c) et $\left(a', b', c'\right)$ dans la base $\mathcal{B}$.

On considère l'application I de $\mathcal{F} \times \mathcal{F}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$I(f\ ;\ g) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Exprimer $I(f\ ;\ g)$ puis $I(f\ ;\ f)$ en fonction des composantes de f et de g dans la base $\mathcal{B}$.

c. Déduire des résultats précédents que l'application I définit sur $\mathcal{F}$ un produit scalaire (c'est-à-dire une forme bilinéaire symétrique positive).

Montrer que $\mathcal{B}$ est une base orthogonale de $\mathcal{F}$. Est-elle orthonormée ?

Partie B

1. Montrer par récurrence que, quel que soit n élément de $\mathbb{N}$, tout élément f de $\mathcal{F}$ possède une dérivée d'ordre n, notée $f^{(n)}$, qui appartient aussi à $\mathcal{F}$; (par convention $f^{(0)} = f$). Montrer que l'application qui à tout élément f de $\mathcal{F}$ associe $f^{(n)}$ est un endomorphisme de $\mathcal{F}$.

Est-ce un automorphisme de $\mathcal{F}$?

2. $\mathcal{F}$ muni du produit scalaire I est un espace vectoriel euclidien.

Soit $\mathcal{F}'$ le plan vectoriel engendré par f_1 et f_2 qui en constituent une base orthonormée $\mathcal{B}'$.

On considère l'endomorphisme φ de $\mathcal{F}$ défini par :

$$\varphi(f) = f^{(2)} = f''$$

Montrer que φ est la composée d'une homothétie vectorielle et d'une projection vectorielle orthogonale sur $\mathcal{F}'$.

Partie C

Soit φ_n l'endomorphisme de $\mathcal{F}'$ défini par $\varphi_n(f) = \dfrac{1}{2^n}f^{(n)}$.

On pose $\Phi = \left\{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\right\}$.

1. Montrer que φ_n est un automorphisme de $\mathcal{F}'$ pour $n = 0, 1, 2$ ou 3.

2. Écrire les matrices respectives de φ_0, φ_1, φ_2, φ_3 dans la base $\mathcal{B}'$. Reconnaître ces automorphismes.

3. Montrer que Φ muni de la composition des applications est un sous-groupe du groupe des automorphismes de $\mathcal{F}'$ isomorphe à $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ muni de l'addition.