Baccalauréat C Orléans-Tours juin 1983

EXERCICE 1 **4 POINTS**

On pose : $K = \displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x$.

1. Soit f la fonction de $]1~;~+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \text{Log}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right).$$

Calculer la fonction dérivée de f. En déduire la valeur de K.

2. On pose : $J = \displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{2} \sqrt{x^2-1}\,\mathrm{d}x$.

Démontrer que :

$$J = \int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x - K.$$

Calculer J à l'aide d'une intégration par parties.

EXERCICE 2 **4 POINTS**

PROBLÈME **12 POINTS**

Les parties B et C sont indépendantes de la partie A

On appelle E un espace affine euclidien orienté de dimension 3 associé à un espace vectoriel V, et $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath},~\vec{k}\right)$ un repère orthonormé direct de E.

Partie A

Soit φ l'endomorphisme de V défini par :

$$\left\{\begin{array}{l c l}
\varphi\left(\vec{\imath}\right) & = & \frac{1}{2}\vec{\imath} + \frac{\sqrt{6}}{4}\vec{\jmath} - \frac{\sqrt{6}}{4}\vec{k}\\
\varphi\left(\vec{\imath}\right) & = & -\frac{\sqrt{6}}{4}\vec{\imath} + \frac{3}{4}\vec{\jmath} + \frac{1}{4}\vec{k}\\
\varphi\left(\vec{\imath}\right) & = & \frac{\sqrt{6}}{4}\vec{\imath} + \frac{1}{4}\vec{\jmath} + \frac{3}{4}\vec{k}
\end{array}\right.$$

1. a. Soit $\vec{u}$ un élément de V de coordonnées $(x~;~y~;~z)$ dans la base $\left(\vec{\imath},~\vec{\jmath},~\vec{k}\right)$. Calculer en fonction de x, y, z les coordonnées x', y', z' de $\varphi\left(\vec{u}\right)$ dans la même base.

b. Démontrer que φ est une rotation vectorielle de V dont on précisera l'axe Δ.

2. Soit $\vec{K}$ le vecteur de V défini par : $\vec{K} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\vec{\jmath}+\vec{k}\right)$.

a. Vérifier que $\vec{K}$ est un vecteur unitaire de Δ.

b. On pose : $\vec{I} = \vec{\imath}$ et $\vec{J} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\vec{\jmath}-\vec{k}\right)$.

Démontrer que $\left(\vec{I},~\vec{J}\right)$ est une base orthonormée du plan vectoriel Π orthogonal à Δ.

On admettra alors que $\left(\vec{I},~\vec{J},~\vec{K}\right)$ est une base orthonormée directe de V.

On choisit d'orienter Π en convenant que la base $\left(\vec{I},~\vec{J}\right)$ est directe.

c. On rappelle que :
- Π est globalement invariant par φ ;
- l'application φ' de Π dans Π telle que, pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$ de Π, $\varphi'\left(\overrightarrow{u}\right) = \varphi\left(\overrightarrow{u}\right)$ est une rotation de Π. Donner une mesure de l'angle de φ'.

3. m étant un réel, on définit l'application affine f_m de E, d'endomorphisme associé φ, telle que l'image de O soit le point de coordonnées : $\left(0\ ;\ \dfrac{m^2-4}{4}\ ;\ \dfrac{m+2}{4}\right)$.
Calculer les valeurs de m pour lesquelles f_m est une rotation affine. Déterminer dans chaque cas l'axe de la rotation par un point et un vecteur directeur.

Partie B

Soit P un plan affine euclidien orienté admettant le repère orthonormé direct $\left(\text{O}\ ;\ \overrightarrow{I},\ \overrightarrow{J}\right)$, repère qui sera noté $\mathcal{R}$.

1. On appelle F la fonction numérique, de variable réelle, définie par :

$$F(x) = x\sqrt{3} + \sqrt{4x^2-1}.$$

Soit (C) sa courbe représentative dans P, rapporté à $\mathcal{R}$.

a. Étudier les variations de la fonction F.

b. Démontrer que (C) admet deux asymptotes que l'on déterminera.

c. Étudier l'existence de tangentes à la courbe (C) aux points d'abscisses $\dfrac{1}{2}$ et $-\dfrac{1}{2}$.

d. Calculer l'abscisse du point d'intersection de (C) et de l'axe des abscisses. Construire la courbe (C).

2. Soit (C$'$) la courbe symétrique de la courbe C par rapport à l'origine.

a. Déterminer une équation de C$'$ dans $\mathcal{R}$, et construire (C$'$) sur le même graphique que C.

b. Démontrer qu'une équation de la courbe : (H) = C $\cup$ C$'$ est :

$$y^2 - x^2 - 2\sqrt{3}xy + 1 = 0.$$

Partie C

Soit g la rotation affine du plan P, de centre O et dont une mesure de l'angle, exprimée en radians, est $\dfrac{\pi}{3}$.

1. Quelle est l'expression analytique de g dans $\mathcal{R}$?

2. a. Déterminer une équation de (H$'$), image de (H) par la rotation g.

b. Quelle est la nature de (H$'$) ?
Préciser le centre, les asymptotes, les foyers de (H$'$).

3. a. Soit (K) une hyperbole, F_1 et F_2 ses foyers.
Démontrer que l'image de (K) par une isométrie affine h est une hyperbole de foyers $h(F_1)$, $h(F_2)$.

b. En déduire la nature de (H), les coordonnées de ses foyers. Placer ces points sur la figure du B 2.