

Durée : 4 heures

❧ Baccalauréat C Orléans–Tours juin 1972 ❧

EXERCICE 1

On considère l'ensemble, E, des entiers relatifs x qui vérifient simultanément

$$\begin{cases} x \equiv 2 \pmod{3}, \\ x \equiv 2 \pmod{5}, \\ x \equiv 2 \pmod{7}, \\ x \equiv 2 \pmod{9}. \end{cases}$$

Indiquer la forme générale des éléments de E et déterminer les éléments de E qui sont compris entre (-1000) et (-500).

Quel est le plus grand commun diviseur (P.G.C.D.) de deux éléments consécutifs de E?

EXERCICE 2

Le plan est rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer la nature de la courbe (C), ensemble des points M, de coordonnées (x ; y) tels que

$$3x^2 + 4y^2 + 6x - 9 = 0.$$

Préciser les éléments caractéristiques de cette courbe (éléments de symétrie, foyers, directrices), la représenter dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

2. Au point M de (C), de coordonnées (x ; y), on associe le nombre complexe $z = x + iy$, affixe de M.

Calculer le module de z, en fonction uniquement

- a. de l'abscisse, x, de z,
- b. d'un représentant, θ , de l'argument de z.

Soit M' et M'' les points de (C) ayant pour affixes z' et z'' d'arguments représentés respectivement par θ et $\theta + \pi$ ($-\pi < \theta \leq \pi$).

Calculer la longueur du segment $[M'M'']$, c'est-à-dire la distance des points M' et M'', en fonction de θ .

PROBLÈME

On rappelle que l'ensemble des applications de \mathbb{R} vers \mathbb{R} , noté F, muni

- d'une loi de composition interne (addition des fonctions numériques) :

$$(\forall f \in F)(\forall g \in F)(\forall x \in \mathbb{R}) \quad [(f + g)(x) = f(x) + g(x)];$$

- d'une loi de composition externe (multiplication par un réel) :

$$(\forall f \in F)(\forall \lambda \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R}) \quad [(\lambda f)(x) = \lambda f(x)],$$

est un espace vectoriel sur \mathbb{R} .

On désigne par E l'ensemble des applications φ de \mathbb{R} vers \mathbb{R} définies par

$$\varphi(x) = (ax + b)e^{-x}, \quad a \text{ et } b \text{ décrivant } \mathbb{R}.$$

Un élément de E est donc déterminé par la donnée d'un couple $(a; b)$ de réels. On note φ_1 l'application correspondant au couple $(1; 0)$ et φ_2 celle correspondant au couple $(0; 1)$.

1.
 - a. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de F et que $(\varphi_1; \varphi_2)$ est une base de E .
 - b. Démontrer que la partie, A , de E formée des fonctions φ monotones (au sens large) sur \mathbb{R} est un sous-espace vectoriel de E , dont on indiquera une base.
Montrer que toute application φ non nulle, de A possède une application réciproque, φ^{-1} .
Expliciter φ^{-1} et préciser son ensemble de définition.
2. À toute fonction φ de E , on fait correspondre $\ell(\varphi) = \varphi + \varphi'$ (φ' étant la fonction dérivée de φ).
 - a. Démontrer que ℓ est une application linéaire de E vers E . Quel est l'espace vectoriel $\ell(E)$, image de E , par cette application? Donner la matrice L de ℓ dans la base $(\varphi_1; \varphi_2)$.
 - b. Déterminer le noyau de ℓ et l'ensemble des éléments de E invariants par ℓ .
3.
 - a. On suppose a et b rationnels. Calculer une primitive de la fonction 'il définie par

$$\varphi(x) = (ax + b)e^{-x}$$

et déterminer les rationnels a et b tels que

$$\int_{-1}^0 (ax + b)e^{-x} dx = -1.$$

- b. Étudier la fonction φ_1 définie sur \mathbb{R} par $\varphi_1(x) = xe^{-x}$.
Tracer la courbe représentative (C) de φ_1 dans un système d'axes orthonormé $(x'Ox, y'Oy)$.
Calculer la moyenne de φ_1 sur l'intervalle fermé $[-1; 0]$.
Déterminer l'aire comprise entre la courbe (C) , la droite $(x'x)$, la droite $(y'y)$ et la droite d'équation $x = h$, h étant une constante positive.
Quelle est la limite de cette aire quand h tend vers $+\infty$?