Baccalauréat C Orléans-Tours septembre 1972

EXERCICE 1

1. Déterminer l'ensemble des couples de nombres entiers naturels, solutions de l'équation

$$(1) \qquad (4x-3y-5)(4x+2y-1)=0.$$

2. Déterminer l'ensemble des couples $(x\,;\,y)$, solutions de l'équation (1), et tels que le P.G.C.D. des nombres x et y soit égal à 5.

EXERCICE 2

En intégrant par parties, calculer

$$A=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x.$$

Donner une valeur approchée de A avec deux décimales exactes.

PROBLÈME

Partie A

Le plan affine euclidien $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\overrightarrow{\imath},\,\overrightarrow{\jmath}\right)$. On considère l'application de $\mathscr{P}$ dans lui-même qui, à tout point M de coordonnées $(x\,;\,y)$, fait correspondre le point M' de coordonnées $\left(x'\,;\,y'\right)$, telles que

$$\left\{\begin{array}{l c l} x' & = & ax+by+c,\\ y' & = & bx-ay+d\end{array}\right.$$

a, b, c et d étant des nombres réels. Dans tout le problème on supposera $(a\,;\,b)\neq(0\,;\,0)$.

1. Déterminer c et d, en fonction de a et de b, pour que le point $\omega(1\,;\,0)$ soit invariant.
   On notera $T_{a,\,b}$ la transformation ponctuelle de $\mathscr{P}$ ainsi définie.
2. Déterminer l'ensemble des points invariants par $T_{0,\,1}$ et démontrer que $T_{0,\,1}$ est une isométrie, que l'on précisera.
3. Montrer que toute transformation $T_{0,\,b}$ est la composée de $T_{0,\,1}$ et d'une transformation simple, que l'on précisera. En déduire la nature et les éléments caractéristiques de $T_{0,\,b}$.

Partie B

Soit (P) le plan vectoriel euclidien associé au plan affine $\mathscr{P}$. Le bipoint $(M,\ N)$ étant un bipoint quelconque dans le plan $\mathscr{P}$, M' et N' les transformés par $T_{a,\,b}$ des points M et N, on considère l'application φ, de (P) dans lui-même qui, à tout vecteur
$\overrightarrow{u}=\overrightarrow{MN}$, fait correspondre le vecteur $\varphi\left(\overrightarrow{u}\right)=\overrightarrow{M'N'}$.

1. **a.** Montrer que φ est une application linéaire bijective, dont on précisera la matrice relativement à la base $\left(\overrightarrow{\imath},\,\overrightarrow{\jmath}\right)$.

b. Montrer que

$$\forall \overrightarrow{u} \in (\mathrm{P}), \quad \left\|\varphi\left(\overrightarrow{u}\right)\right\| = \lambda\left\|\overrightarrow{u}\right\|,$$

λ étant un nombre réel, que l'on déterminera, en fonction de a et de b.

2. Soit h l'homothétie vectorielle de rapport $\dfrac{1}{\lambda}$; montrer que l'application composée $\varphi \circ h$ est une isométrie vectorielle (ou transformation orthogonale).
En déduire que l'application φ est la composée dans un ordre quelconque d'une isométrie vectorielle et d'une homothétie vectorielle de rapport positif.

3. Montrer qu'il existe deux droites vectorielles orthogonales (Δ_1) et (Δ_2), globalement invariantes par φ.
Soit $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ deux vecteurs non nuls appartenant respectivement à (Δ_1) et à (Δ_2), écrire la matrice de φ relativement à la base $\left(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\right)$.

4. Utiliser l'étude précédente pour définir, avec précision, la transformation $T_{a,\,b}$.

Partie C

Dans toute cette partie, on suppose $a = 1$ et $b = 1$. On note T la transformation ponctuelle de $\mathscr{P}$J correspondante

$$\left\{\begin{array}{l c l} x_1 & = & x + y,\\ y_1 & = & x - y - 1.\end{array}\right.$$

1. Étudier et représenter graphiquement, dans le repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\overrightarrow{\imath},\,\overrightarrow{\jmath}\right)$, les fonctions numériques f et g définies par

$$f(x) = x + 1 - 2\sqrt{2x-1} \quad ; \quad g(x) = x + 1 + 2\sqrt{2x-1}.$$

2. On désigne par (C) la réunion des courbes représentatives des fonctions f et g.
Déterminer l'équation cartésienne de la courbe (C_1) transformée de (C) par T.
En déduire la nature de (C_1) ; préciser ses éléments caractéristiques.