Baccalauréat C septembre 1981 Orléans-Tours

EXERCICE 1

1. Déterminer les couples $(x,\ y)$ d'entiers relatifs solutions de l'équation

$$5x - 3y = 7.$$

2. Montrer que si $(x,\ y)$ est une solution de l'équation, alors le plus grand diviseur commun de x et y n'a que deux valeurs possibles.
3. Déterminer les couples $(x,\ y)$ solutions de l'équation tels que le plus grand diviseur commun de x et y soit égal à la plus grande de ces deux valeurs.

EXERCICE 2

Soit la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x} \end{array}$$

1. **a.** Étudier les variations de f.
   b. Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.
2. **a.** Montrer que la courbe admet un centre de symétrie dont on donnera les coordonnées.
   b. Montrer que f est intégrable sur tout segment de $\mathbb{R}$.
   c. À l'aide de remarques géométriques donner un calcul simple de $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$ (on rappelle que deux domaines plans isométriques ont même aire).
3. **a.** Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$ -x e

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}.$$

   En déduire une primitive de f.
   b. Retrouver par le calcul le résultat de 2. c.

EXERCICE 3

E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ dont une base est $\left(\overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath},\ \overrightarrow{k}\right)$.
On rappelle que l'ensemble des applications linéaires de E dans E, noté $\mathscr{L}(\mathrm{E})$, muni des lois d'addition et de multiplication par un nombre réel habituelles a une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, que $\mathscr{L}(\mathrm{E})$ muni de l'addition et de la loi de composition des applications, notée $\circ$, est un anneau commutatif et unitaire.
Pour tout triplet $(a\ ;\ b\ ;\ c)$ de réels, on définit l'application linéaire de E dans E notée $\varphi_{(a\ ;\ b\ ;\ c)}$ par

$$\left\{\begin{array}{lcl} \varphi_{(a\ ;\ b\ ;\ c)}\left(\overrightarrow{\imath}\right) & = & a\overrightarrow{\imath} + b\overrightarrow{\jmath} + c\overrightarrow{k} \\ \varphi_{(a\ ;\ b\ ;\ c)}\left(\overrightarrow{\jmath}\right) & = & c\overrightarrow{\imath} + a\overrightarrow{\jmath} + b\overrightarrow{k} \\ \varphi_{(a\ ;\ b\ ;\ c)}\left(\overrightarrow{k}\right) & = & b\overrightarrow{\imath} + c\overrightarrow{\jmath} + a\overrightarrow{k}. \end{array}\right.$$

Notations :

$$\begin{aligned}
&\mathscr{F} = \left\{\varphi_{(a\,;\,b\,;\,c)} \in \mathscr{L}(\mathrm{E})\,;\,(a\,;\,b\,;\,c) \in \mathbb{R}^3\right\}\\
&\omega = \varphi_{(0\,;\,0\,;\,0)}\,; \quad \alpha = \varphi_{(1\,;\,0\,;\,0)}\,;\\
&\beta = \varphi_{(0\,;\,1\,;\,0)}\,; \quad \gamma = \varphi_{(0\,;\,0\,;\,1)}.r
\end{aligned}$$

Remarque - Les parties A, B et C du problème sont indépendantes.

A Structures de $\mathscr{F}$

1. Démontrer que quels que soient a, b et c réels, $\varphi_{(a\,;\,b\,;\,c)}$ est une combinaison linéaire de α, β et γ.
   En déduire que $\mathscr{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(\mathrm{E})$. Quelle est la dimension de $\mathscr{F}$?
2. Reproduire en la complétant la table de composition ci-dessous. ($\circ$ est le symbole de la composition des applications).
   Justifier en présentant les calculs.

$\circ$	α	β	γ
α			
β			
γ			

Démontrer que $(\mathscr{F}, +, \circ)$ est un anneau commutatif, unitaire.

B Noyau et image de $\varphi_{(a\,;\,b\,;\,c)}$

Notations :

$\varphi_{(a\,;\,b\,;\,c)}$ est notée φ dans cette partie.

$\mathrm{N}(\varphi)$: Noyau de φ ; $\mathrm{I}(\varphi)$: image de φ.

D : Droite vectorielle de base $\left(\overrightarrow{\imath} + \overrightarrow{\jmath} + \overrightarrow{k}\right)$.

P : Plan vectoriel d'équation cartésienne

$$-x + y + z = 0.$$

1. Calculer $\dfrac{1}{2}\left[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\right]$.
2. Démontrer que $\mathrm{N}(\varphi)$ est l'ensemble des vecteurs dont les coordonnées $(x\,;\,y\,;\,z)$ vérifient le système

$$\left\{\begin{array}{lcl} ax + cy + bz &=& 0\\ bx + ay + cz &=& 0\\ (a+b+c)(x+y+z) &=& 0.\end{array}\right.$$

   Dans le cas où $(a + b + c)$ est non nul démontrer que si $\mathrm{N}(\varphi)$ n'est pas réduit au vecteur nul, alors $a = b = c$.
3. Déterminer $\mathrm{N}(\varphi)$ et $\mathrm{I}(\varphi)$ dans chacun des cas suivants :
   1$^{\text{er}}$ cas : il existe parmi a, b, c au moins deux réels distincts et la somme $(a + b + c)$ n'est pas nulle.
   2$^{\text{e}}$ cas : a, b et c sont tous les trois nuls.
   3$^{\text{e}}$ cas : a, b et c sont égaux et non nuls.

4. On suppose qu'il existe parmi a, b, c au moins deux réels distincts et que la somme $(a+b+c)$ est nulle.
   Calculer $\varphi\left(\vec{\imath}+\vec{\jmath}+\vec{k}\right)$. Montrer que $\varphi\left(\vec{\imath}\right)$ et $\varphi\left(\vec{\jmath}\right)$ sont deux vecteurs du plan vectoriel P et sont linéairement indépendants.
   En déduire $\mathrm{N}(\varphi)$ et $\mathrm{I}(\varphi)$.

C Dans cette partie on suppose E espace vectoriel euclidien et $\left(\vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$ base orthonormée directe, on note $\Psi = \varphi_{(2/3\ ;\ 2/3\ ;\ -1/3)}$ et on considère un espace affine $\mathscr{E}$ associé à E de repère $\left(\mathrm{O}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$, O étant un point de $\mathscr{E}$.
Soit O′ le point de $\mathscr{E}$ de coordonnées $(2/3\ ;\ -1/3\ ;\ 2/3)$ et f l'application affine associée à l'application linéaire Ψ et telle que $f(\mathrm{O}) = \mathrm{O}'$.
Démontrer que f est un vissage. Quelle est la direction de l'axe du vissage ?
Énoncer une méthode de recherche des éléments caractéristiques du vissage. Déterminer ces éléments caractéristiques.