Durée : 4 heures

↜ Baccalauréat C Orléans juin 1969 ↝

EXERCICE 1

Démontrer que le polynôme

$$P(z) = 8z^4 - 8z^2 + 27z - 27$$

peut se mettre sous la forme

$$P(z) = (z-1)Q(z),$$

$Q(z)$ étant un polynôme du troisième degré, qu'on déterminera.
Résoudre l'équation $P(z) = 0$ dans le corps, $\mathbb{C}$, des nombres complexes.
Donner le module et l'argument de chacune des racines.

EXERCICE 2

On donne un tétraèdre ABCD.

1. Déterminer l'ensemble des points M de l'espace tels que

$$\left(\overrightarrow{M\text{A}} + \overrightarrow{M\text{B}} + \overrightarrow{M\text{C}}\right).\overrightarrow{M\text{D}} = 3k,$$

   k étant un nombre réel donné. Discuter suivant les valeurs de k (on nommera G le centre de gravité du triangle ABC et O le milieu de DG).
2. Déterminer l'ensemble des points P de l'espace tels que

$$\left|\overrightarrow{P\text{A}} - 2\overrightarrow{P\text{B}} + 4\overrightarrow{P\text{C}}\right| = 3\left|\overrightarrow{P\text{D}}\right|.$$

PROBLÈME

N. B. - Dans ce problème, $\{-1\ ;\ +1\}$ représente l'ensemble des deux nombres réels -1 et $+1$; $]-1\ ;\ +1[$ représente l'ensemble des x réels tels que $-1 < x < +1$.
On considère la fonction f qui, à tout $x \in \mathbb{R}$, associe (quand cela est possible) l'image

$$f(x) = \frac{x^3 - 9x}{3\left(x^2 - 1\right)}$$

1. **a.** Étudier les variations de f. Construire le graphe de f dans un système d'axes orthonormé $(x'\text{O}x,\ y'\text{O}y)$ et montrer qu'il a un centre de symétrie.
   b. On désigne par F l'application de $]-1\ ;\ +1[$ dans R qui, à tout x de]- 1, + 1[, associe l'image x3-9x F(x) = f(x) = 3(x2 -1) (restriction de f à cet intervalle). Expliquer pourquoi F est une application bijective de $]-1\ ;\ +1[$ sur $\mathbb{R}$. Soit F^{-1} l'application réciproque de F ; montrer que F^{-1} est impaire.
2. On se propose de déterminer l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ solutions de l'équation

$$\text{(E)} \qquad \frac{x^3 - 9x}{3\left(x^2 - 1\right)} = \frac{a^3 - 9a}{3\left(a^2 - 1\right)},$$

   a étant un paramètre donné appartenant à $\mathbb{R} - \{-1\ ;\ +1\}$.
   a. Résoudre graphiquement l'équation (E) à l'aide de 1. a.

b. On cherche, dans cette partie, à résoudre algébriquement l'équation (E) rendue entière (équation du troisième degré).

Après avoir remarqué qu'elle a une solution évidente, déterminer les deux autres ; simplifier leurs expressions pour les obtenir sous forme de fonctions homographiques de a, soit $u(a)$ et $v(a)$. On choisira

$$u(a) = \frac{a-3}{a+1} \quad \text{et} \quad v(a) = \frac{-(a+3)}{a-1}.$$

3. a. Construire dans un système d'axes orthonormé $(a'\Omega a,\ z'\Omega z)$ le graphe de la fonction u qui, à $a \in \mathbb{R} - \{-1\ ;\ +1\}$, associe l'image $z = u(a)$.

Remarquer que $v(a) = -u(-a)$; en déduire, dans le même système d'axes, le graphe de la fonction v définie de façon analogue.

b. Expliquer, à l'aide du 2. a., pourquoi la réunion des graphes de u et v n'a pas de points dans le carré

$$-1 \leqslant a \leqslant +1, \quad -1 \leqslant z \leqslant +1$$

et pourquoi, pour $a < -1$ ou $a > +1$, elle a un point et un seul dans la bande $-1 < z < +1$.

4. On considère la fonction $F^{-1} \circ f$ qui, à $a \in \mathbb{R} - \{-1\ ;\ +1\}$, associe l'image $F^{-1}[f(a)]$.

a. Après avoir relu attentivement la définition de F^{-1}, préciser l'ensemble des valeurs de $F^{-1} \circ f$.

b. Quelle est la partie du graphe de $F^{-1} \circ f$ correspondant à $a \in]-1\ ;\ +1[$? On la tracera par rapport aux axes $(a'\Omega a,\ z'\Omega z)$ précédents.

c. Utiliser les graphes de u et v pour représenter la fonction $F^{-1} \circ f$ lorsque $a < -1$ et lorsque $a > +1$.

d. Le graphe de $F^{-1} \circ f$ est symétrique par rapport à Ω ; pouvait-on le prévoir ?