Baccalauréat C Orléans juin 1971

EXERCICE 1

Un segment AB a pour longueur a. On appelle M_1 le milieu de AB, M_2 le milieu de BM_1, M_3 le milieu de M_1M_2, M_4 le milieu de M_2M_3, M_n le milieu de $M_{n-2}M_{n-1}$.

1. Calculer la longueur AM_n en fonction de n.
2. Montrer que, lorsque n tend vers l'infini, Mn tend vers une position limite, L.

EXERCICE 2

1. Linéariser $f(x) = \sin^4 x$ [c'est-à-dire décomposer $f(x)$ en une somme dont les termes variables sont des sinus ou cosinus de x et de ses multiples].
2. Trouver une primitive de $f(x)$.

PROBLÈME

Partie A

1. Étudier les variations et construire la courbe représentative de la fonction f donnée par

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x + 3.$$

Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une seule racine x_0 ; on ne calculera pas x_0, mais on montrera que x_0 appartient à l'intervalle $]-1\,;\,0[$.

2. Soit la fonction F donnée par

$$F(x) = x^2 - \frac{3x}{x-2}.$$

Déduire, des résultats obtenus dans le paragraphe précédent, le sens de variation de F.
Construire la courbe représentative de la fonction F dans un repère rectangulaire. On ne cherchera pas à préciser la valeur de l'extremum relatif.
Résoudre l'équation $F(x) = 0$.

Partie B

Dans tout ce qui suit, le plan est rapporté à un repère orthonormé $x'Ox$ et $y'Oy$ de vecteurs de base $\overrightarrow{\imath}$ et $\overrightarrow{\jmath}$.
On considère l'inversion, I, de pôle O et de puissance $k = 3$, la translation, T, déterminée par le vecteur $\overrightarrow{v} = 2\overrightarrow{\imath}$ (le point O a pour image le point d'abscisse 2 de l'axe $x'Ox$) et la transformation, $U = T \circ I$, produit de l'inversion (effectuée d'abord) par la translation T.
On désigne par M_1 l'image par I d'un point M du plan, $M_1 = I(M)$, et par M' l'image par T de M_1

$$M' = T(M_1).$$

1. Démontrer que l'image par U d'un point M appartenant à $x'Ox$ ($M \neq O$) appartient aussi à $x'Ox$. Calculer l'abscisse x' du point M' en fonction de l'abscisse x du point M.

2. Démontrer que la transformation U admet, sur $x'Ox$, deux points doubles A et B.
   Calculer les abscisses des points A et B.
   Démontrer que les points A et B sont les seuls points doubles de U.
3. Quelle est la nature de la courbe $\left(C'\right)$, transformée par U d'un cercle (C) du plan ?
4. Trouver l'image par U du cercle de diamètre AB.

Partie C

Dans ce qui suit, on considère des cercles centrés sur $x'Ox$ et ne passant pas par O. Soit (C) le cercle de centre $\mathrm{P}(p\,;\,0)$ et de rayon R, $R \neq |p|$.
L'image par U de (C) est un cercle $\left(C'\right)$.

1. Calculer le rayon R' de $\left(C'\right)$ en fonction de R et de p.
   Calculer l'abscisse du centre de $\left(C'\right)$ en fonction de R et de p.
2. Dans cette question on se propose, en utilisant les résultats relatifs à la fonction F du paragraphe A, d'étudier l'existence de cercles (C) tels que (C) et $\left(C'\right)$ soient cocentriques.
   a. p étant donné, peut-on trouver R pour que (C) et $\left(C'\right)$ soient cocentriques ? Discuter suivant les valeurs de p (calculer R^2 en fonction de p).
   b. R étant donné, démontrer qu'il existe trois valeurs de p pour lesquelles (C) et $\left(C'\right)$ sont cocentriques.
3. Démontrer qu'il existe des cercles (C) tels que (C) et $\left(C'\right)$ aient même rayon. Caractériser les familles de cercles (C) ainsi obtenues.
4. Existe-t-il des cercles (C) tels que (C) et $\left(C'\right)$ soient confondus ?