∽ Baccalauréat C Orléans–Tours juin 1974 ∾

EXERCICE 1

1. Déterminer et représenter graphiquement l'ensemble Δ des points M du plan complexe, d'affixe $z = x + \mathrm{i}y$, tels que

$$|z - 3 - 2\mathrm{i}| = |z - 7 + 2\mathrm{i}|$$

Le plan sera rapporté au repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$.

2. Caractériser géométriquement la transformation ponctuelle φ du plan complexe associée à l'application f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par

$$f\ :\ z \longmapsto z' = \left(1 + \mathrm{i}\sqrt{3}\right) z - 5\mathrm{i}\sqrt{3}.$$

3. Quel est l'ensemble Δ', image par φ de l'ensemble Δ déterminé à la première question ? Représenter graphiquement Δ'.

EXERCICE 2

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par

$$f\ :\ x \longmapsto \frac{x^2 - 3|x - 2|}{x - 1}$$

1. Étudier cette fonction et construire sa courbe représentative (Γ) dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$, l'unité de longueur étant 2 cm.

2. Donner l'équation, dans le repère $\left(\mathrm{O}\,;\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$, de la parabole (P) d'axe dirigé par $\overrightarrow{\jmath}$, de sommet $\Omega\left(\dfrac{7}{2}\,;\ 6\right)$ et passant par $\mathrm{A}(2\,;\ 4)$, Tracer cette parabole dans le même repère.

3. Quelle est l'aire, à 10^{-2} cm^2 près, du domaine Δ délimité par les courbes (P) et (Γ) ?
On commencera par déterminer les points d'intersection des courbes (P) et (Γ).

PROBLÈME

$\overrightarrow{E_2}$ désigne un plan vectoriel sur $\mathbb{R}$ rapporté à la base $\left(\overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$. On considère l'ensemble $\mathscr{A}$ des endomorphismes f de $\overrightarrow{E_2}$ ayant pour matrice, dans la base $\left(\overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$, $A_f = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix}$, où a et b sont des nombres réels.

1. Montrer que $\mathscr{A}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathscr{L}\left(\overrightarrow{E_2}\right)$ des endomorphismes de $\overrightarrow{E_2}$.

2. On pose $f^2 = f \circ f$, $f^3 = f \circ f \circ f$, etc.
f étant un élément de $\mathscr{A}$ donner la matrice des endomorphismes f^2, f^3, f^4.
En déduire la forme de la matrice de f^n et démontrer ce résultat en raisonnant par récurrence.

3. Soit $\overrightarrow{w_0} = X_0\overrightarrow{\imath} + Y_0\overrightarrow{\jmath}$ un vecteur donné de $\overrightarrow{E_2}$.
Calculer $\overrightarrow{w_1} = f\left(\overrightarrow{w_0}\right)$, $\overrightarrow{w_2} = f\left(\overrightarrow{w_1}\right)$, $\overrightarrow{w_3} = f\left(\overrightarrow{w_2}\right)$ en fonction de X_0 et Y_0.
Calculer les composantes X_n et Y_n de $\overrightarrow{w_n} = f\left(\overrightarrow{w_{n-1}}\right)$, d'une part en fonction de X_{n-1} et Y_{n-1}, d'autre part en fonction de X_0; Y_0 et n.

4. On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par

$$\begin{array}{lclclcl} u_0 & = & -3 & \qquad & u_n & = & 2u_{n-1} \\ v_0 & = & 1 & & v_n & = & 2v_{n-1} - u_{n-1} \end{array}$$

Calculer u_n et v_n en fonction de n.

5. Montrer que $(\mathscr{A}, +, \circ)$ est un anneau commutatif.
6. Soit g et h deux éléments donnés de $\mathscr{A}$ définis par leurs matrices

$$A_g = \begin{pmatrix} p & 0 \\ q & p \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A_h = \begin{pmatrix} r & 0 \\ s & r \end{pmatrix}$$

Déterminer, par leurs matrices, les endomorphismes f appartenant à $\mathscr{A}$ qui vérifient $g \circ f = h$. On sera amené à discuter suivant les valeurs de p, q, r, s.

7. Déterminer de même les endomorphismes f appartenant à $\mathscr{A}$ tels que :
   a. $f \circ f = h$. Discuter.
   b. $f \circ f + 2g \circ f = h$. Discuter.

N. B. - E étant un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, on rappelle qu'un endomorphisme de E est une application linéaire de E dans E et que les endomorphismes de E forment eux-mêmes un espace vectoriel, généralement noté $\mathscr{L}(E)$.