Baccalauréat C Orléans-Tours juin 1978

EXERCICE 1 **3 POINTS**

On se propose de trouver une suite réelle $\begin{array}{rccc} u: & \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ & n & \longmapsto & u_n \end{array}$, vérifiant :

$$u_0 = 1 \quad \text{et pour tout entier} \quad n,\ u_{n+1} = \frac{-7u_n - 8}{2u_n + 1}$$

1. On suppose que u existe.

a. Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_n \neq -2$.

b. Montrer que la suite v, définie sur $\mathbb{N}$ par 2 u + 1

$$v_n = \frac{2u_n + 1}{u_n + 2}$$

est une suite arithmétique. Calculer u_n en fonction de n. On note $u_n = f(n)$.

2. Montrer que la suite $\left(f(n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie les conditions imposées à u.
Conclure. Trouver la limite de la suite u.

3. Déterminer les valeurs de n dans $\mathbb{N}$ telles que u_n soit un entier relatif. (On pourra utiliser le résultat suivant : soit p et q deux entiers strictement positifs,

$$\frac{p}{q} \text{ entier} \iff \text{pgcd}(p,\ q) = q$$

EXERCICE 2 **4 POINTS**

Deux tireurs A et B visent une même cible.
Soit l'univers Ω : $\Omega = \{(+,\ +),\ (+,\ -), (-,\ +),\ (-,\ -)\}$ où chaque élément de Ω est un couple
de premier élément : + si A atteint la cible − sinon
de deuxième élément : + si B atteint la cible − sinon
La probabilité sur Ω est définie par :

$$p(+,\ +) = \frac{1}{32},\quad p(+,\ -) = \frac{7}{32},\quad p(-,\ +) = \frac{3}{32},\quad p(-,\ -) = \frac{21}{32}.$$

1. Déterminer la probabilité pour que A atteigne la cible.
Déterminer la probabilité pour que B atteigne la cible.

2. Les deux événements « A atteint la cible » et « B atteint la cible » sont-ils indépendants ?

3. A tire 5 fois.
On admet que les cinq tirs sont indépendants entre eux. Quelle est la probabilité pour que A atteigne la cible trois fois exactement ?

PROBLÈME **13 POINTS**

Dans tout le problème on considère le plan affine euclidien (P) orienté, rapporté à un repère orthonormé direct.

Partie A

1. **a.** On considère la fonction f

$$\begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = x\sqrt{3} + 2\sqrt{x^2+1}. \end{array}$$

Montrer que la courbe représentative $\mathcal{C}$ admet deux asymptotes dont on déterminera les équations.

b. Étudier les variations de f et construire la courbe représentative $\mathcal{C}$ dans le repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\,\overrightarrow{\imath},\,\overrightarrow{\jmath}\right)$ de (P).

2. Soit $\mathcal{C}'$ la courbe représentant dans le repère $\left(\text{O}\,;\,\overrightarrow{\imath},\,\overrightarrow{\jmath}\right)$ la fonction g :

$$\begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & g(x) = x\sqrt{3} - 2\sqrt{x^2+1}. \end{array}$$

Montrer que la courbe $\mathcal{C}'$ est l'image de la courbe $\mathcal{C}$ dans la symétrie par rapport au point O.

3. Soit F le point de coordonnées $(-1\,;\,\sqrt{3})$ (donc $\overrightarrow{\text{OF}} = -\overrightarrow{\imath} + \sqrt{3}\,\overrightarrow{\jmath}$.) et $\mathcal{D}$ la droite d'équation $x - y\sqrt{3} + 2 = 0$.
On appelle K la projection orthogonale sur $\mathcal{D}$ d'un point $M(x\,;\,y)$ quelconque du plan (P).
On appelle $\mathcal{H}$ l'ensemble des points M du plan (P) tels que $\text{MF}^2 = 2\,\text{MK}^2$.

a. Quelle est la nature de la conique $\mathcal{H}$?

b. Démontrer que la conique $\mathcal{H}$ admet pour équation cartésienne

$$y^2 - 2\sqrt{3}xy - \left(x^2 + 4\right) = 0$$

c. Démontrer que $\mathcal{H} = \mathcal{C} \cup \mathcal{C}'$. Compléter le graphique de $\mathcal{C}$ pour obtenir $\mathcal{H}$.

Partie B

Pour tout couple $(\alpha\,;\,\beta)$ de nombres réels non nuls, on définit l'application affine $\varphi_{\alpha,\,\beta}$ du plan (P) dans lui-même, qui à tout point M de coordonnées $(x\,;\,y)$ associe le point M' de coordonnées $\left(x'\,;\,y'\right)$ défini par

$$\left\{\begin{array}{lcr} x' & = & \alpha x + (\alpha -)\beta\sqrt{3}y \\ y' & = & \beta y \end{array}\right.$$

On appelle G l'ensemble des applications $\varphi_{\alpha,\,\beta}$, $(\alpha\,;\,\beta)$ décrivant $\mathbb{R}^\star \times \mathbb{R}^\star$.

1. Montrer que G muni de la loi $\circ$ est un groupe.
2. Déterminer les applications $\varphi_{\alpha,\,\beta}$ de G qui sont des involutions.
3. On note $\varphi_{\alpha,\,\beta}(\mathcal{H})$ l'ensemble des images par $\varphi_{\alpha,\,\beta}$ des points de $\mathcal{H}$.
On se propose de déterminer l'ensemble G' des applications $\varphi_{\alpha,\,\beta}$ de G telles que $\varphi_{\alpha,\,\beta}(\mathcal{H}) = \mathcal{H}$

a. Déterminer les couples $(\alpha\,;\,\beta)$ tels que les images A′ et B′ des points $\text{A}(-\sqrt{3}\,;\,1)$ et $\text{B}(0\,;\,2)$ de $\mathcal{H}$ appartiennent à $\mathcal{H}$.

b. Démontrer que pour les couples $(\alpha\,;\,\beta)$ du a., $\varphi_{\alpha,\,\beta}(\mathcal{H}) \subset \mathcal{H}$.
Déduire du B 2. , que pour ces couples $(\alpha\,;\,\beta)$

$$\varphi_{\alpha,\,\beta}(\mathcal{H}) = \mathcal{H}.$$

4. Caractériser géométriquement les quatre transformations trouvées au B 3. Montrer que G' est un sous-groupe de $(G,\,\circ)$ en dressant la table d'opérations de G' pour la loi $\circ$.

Partie C

On considère le point mobile M dont les coordonnées, en fonction du temps t (t décrivant $\mathbb{R}$) sont dans le repère $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$:

$$\left\{\begin{array}{l c l} x(t) &=& -\dfrac{1}{2}\left(\text{e}^{t} - \text{e}^{-t}\right)\\ y(t) &=& \dfrac{2-\sqrt{3}}{2}\text{e}^{t} + \dfrac{2+\sqrt{3}}{2}\text{e}^{-t}\end{array}\right.$$

Pour t réel, exprimer e^{t} et e^{-t} à l'aide de $x(t)$ et $y(t)$.
Déterminer la trajectoire en mouvement.