∽ Baccalauréat C Orléans-Tours juin 1984 ∾

EXERCICE 1 **4 POINTS**

Soit la suite numérique $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ définie pour tout n de $\mathbb{N}^\star$ par :

$$I_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-x)^n \text{e}^x\,\text{d}x.$$

1. Calculer I_1.
2. Par intégration par parties, exprimer I_n en fonction de I_{n-1} pour $n \geqslant 2$.
   En déduire que $I_n = \text{e} - \displaystyle\sum_{p=0}^{p=n}\frac{1}{p!}$ pour $n > 1$.
3. Majorer la fonction $x \longmapsto (1-x)^n\text{e}^x$ sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.
   En déduire le limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et montrer que :

   $$\text{e} = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right).$$

   N.B.- on rappelle les notations suivantes :

   $$0! = 1\ ;\ 1! = 1\ ;\ \text{pour } n > 1,\ n! = 1\times 2\times\cdots\times n.$$

EXERCICE 2 **4 POINTS**

Soit k un réel différent de 0 et de 1. On considère trois points A, B et C deux à deux distincts tels que $\overrightarrow{\text{AC}} = k\overrightarrow{\text{AB}}$ et les cercles Γ_1 et Γ_2 de diamètres respectifs [AB] et [AC].
Une droite Δ non perpendiculaire à (AB) et distincte de (AB), passant par A, recoupe les cercles Γ_1 et Γ_2 respectivement en M et N.

1. **a.** Quelle est la position relative des droites (BM) et (CN) ?
   b. Pour quelle valeur de k les droites (BN) et (CM) sont-elles parallèles ?
2. On suppose désormais k fixé et différent de -1. Soit P le point d'intersection des droites (BN) et (CM).
   a. Soit h l'homothétie de centre P telle que $h(\text{B}) = \text{N}$.
   Démontrer que $h(\text{M}) = \text{C}$. Calculer le rapport de l'homothétie h en fonction du réel k (on pourra se servir des vecteurs $\overrightarrow{\text{BM}}$ et $\overrightarrow{\text{NC}}$).
   b. Déterminer le réel α tel que

   $$\overrightarrow{\text{BP}} = \alpha\overrightarrow{\text{BN}}.$$

   Quel est le lieu géométrique du point P lorsque Δ varie ?
   En se plaçant dans le cas où $k = 2$ et où la distance AB est égale à 6 cm, donner les éléments géométriques remarquables du lieu géométrique L de P, et faire une figure soignée.

PROBLÈME **12 POINTS**

Partie A

Soit $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ un repère orthonormal direct du plan.
Soit f_1 la fonction numérique de variable réelle définie par

$$f_1(x) = -2x + \sqrt{3\left(x^2-1\right)}.$$

1. **a.** Étudier les variations de f_1.

   b. Soit $\mathscr{C}_1$ sa courbe représentative dans le plan rapporté au repère $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$. Démontrer que $\mathscr{C}_1$ admet deux droites asymptotes, passant l'une et l'autre par l'origine et déterminer la position de $\mathscr{C}_1$ par rapport à ces asymptotes.

   Préciser les tangentes à $\mathscr{C}_1$ aux points d'abscisse - 1 et 1.

   Construire $\mathscr{C}_1$ (on prendra comme unité : 2 cm).

2. Soit f_2 la fonction numérique de variable réelle définie par

$$f_2(x) = -2x - \sqrt{3\left(x^2-1\right)}.$$

   Montrer que sa courbe représentative $\mathscr{C}_2$ est l'image de $\mathscr{C}_1$ par la symétrie de centre O. Montrer que la courbe $\mathscr{C}_1 \cup \mathscr{C}_2$ a pour équation

$$x^2 + 4xy + y^2 + 3 = 0.$$

   Construire cette courbe que l'on notera $\mathscr{C}$.

Partie B

1. Soit S la transformation du plan qui au point M d'affixe z fait correspondre le point M' d'affixe z' telle que

$$z' = \frac{\sqrt{6}}{2}(1+\mathrm{i})z.$$

   Caractériser cette transformation. Trouver l'équation de la courbe $\mathscr{H}$ transformée de $\mathscr{C}$ par cette transformation S.

   Donner la nature de la courbe $\mathscr{H}$ ainsi obtenue.

2. En utilisant la définition bifocale d'une hyperbole montrer que l'image par une similitude d'une hyperbole est encore une hyperbole. En déduire que la courbe $\mathscr{H}$ est une hyperbole dont on donnera les foyers (on précisera les coordonnées de ces deux points).