Durée : 4 heures

Baccalauréat C Orléans septembre 1971

EXERCICE 1

Déterminer la solution de l'équation différentielle

$$y' + 2y = 0$$

qui pour $x = \text{Log}\,2$ prend la valeur 1.
Tracer la courbe représentative de la solution obtenue, par rapport à un repère orthonormé et calculer l'aire limitée par cette courbe, l'axe $x'x$, les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = X$, où X est un nombre supérieur à 0.

EXERCICE 2

Dans l'espace, les points A, B, C, I et J sont fixes ; M étant un point quelconque, on construit les vecteurs $\overrightarrow{V}$, $\overrightarrow{V'}$ et $\overrightarrow{V''}$, tels que

$$\overrightarrow{V} = \overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}, \quad \overrightarrow{V'} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MJ}, \quad \overrightarrow{V''} = \overrightarrow{MI} - \overrightarrow{MJ}.$$

Déterminer l'ensemble (E$'$) des points M, tels que $\overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{V'} = 0$ et l'ensemble (E$''$) des points M, tels que $\overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{V''} = 0$.

PROBLÈME

1. **a.** x est un nombre réel donné. Pour quelles valeurs de x l'équation

$$y^2 - 2xy + 4x - 3 = 0,$$

dont y est l'inconnue, a-t-elle deux racines réelles y_1 et y_2 ? On appelle y_1 la plus grande des deux.
Étudier les variations de y_1 et de y_2 en fonction de x. Tracer, par rapport à un mà^ame repére, mais en les distinguant, les courbes représentatives (C_1) et (C_2).

b. On appelle (C) la réunion des courbes (C_1) et (C_2). Démontrer qu'un point de coordonnées $(x\,;\,y)$ appartient à (C) si, et seulement si,

$$(x-2)^2 - (y-x)^2 = 1.$$

En déduire les points de (C) dont les coordonnées sont des entiers relatifs.

2. Dans cette partie, m désigne un nombre complexe, z_1 et z_2 les racines complexes de l'équation

$$z^2 - 2mz + 4m - 3 = 0.$$

On considérera, dans un plan, le repére orthonormé $\left(\text{O}\,;\,\overrightarrow{u},\,\overrightarrow{v}\right)$. Le nombre complexe $a + b$i sera représenté par son image dans ce plan, qui est le point de coordonnées a et b. On appelle A, I et B les images respectives des nombres 1, 2 et 3, M l'image de m, M_1 et M_2 les images de z_1 et de z_2.

a. i. Montrer que M est le milieu de M_1M_2.
Pour quelles positions de M, les points M_1 et M_2 sont-ils confondus ?

ii. Montrer que le produit $\mathrm{I}M_1 \cdot \mathrm{I}M_2$ est constant et que l'axe $\overrightarrow{\mathrm{O}u}$ est bissectrice de l'angle de $\overrightarrow{\mathrm{I}M_1}$ et de $\overrightarrow{\mathrm{I}M_2}$,

b. On appelle M' l'image du produit

$$z = \left(z_1 - \frac{3-\mathrm{i}}{2}\right)\left(z_2 - \frac{3-\mathrm{i}}{2}\right)$$

Montrer que l'on peut passer de M à M' pur une similitude, dont on donnera les éléments. Quel est, dans le cas où M décrit le cercle de centre O et de rayon 1, l'ensemble des points M' ?