Baccalauréat C Orléans–Tours septembre 1977

EXERCICE 1 **4 POINTS**

1. Déterminer le plus grand diviseur commun des nombres 21 590 et 9 525.
2. Déterminer l'ensemble des entiers relatifs x pour lesquels on a

$$34x \equiv 2 \quad (15).$$

3. Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation :

$$21\,590x + 9\,525y = 1\,270.$$

EXERCICE 2 **4 POINTS**

Soit $\mathcal{P}$ un plan affine rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$.

1. Soit M' le transformé d'un point M de $\mathcal{P}$ dans la symétrie orthogonale par rapport à la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x$.
   Soit M'' l'image de M' dans la symétrie orthogonale par rapport à la droite d'équation $y = 0$.
   Exprimer en fonction des coordonnées (x et y) de M, les coordonnées x'' et $y'' de$M".
   En déduire la nature et les éléments caractéristiques de la transformation, t_1, de $\mathcal{P}$ qui à M associe M''.
   Retrouver géométriquement ce résultat.
2. Soit t_2 la transformation de $\mathcal{P}$ qui à $M(x\,;\ y)$ associe $N(X\,;\ Y)$ tel que

$$\left\{\begin{array}{l c l} X &=& 1+y\\ Y &=& 1-x \end{array}\right.$$

   Caractériser la transformation t_2, puis la transformation $t_2 \circ t_1$.

PROBLÈME **4 POINTS**

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension 2. On désigne par $\mathcal{F}$ l'ensemble des endomorphismes φ de E qui possèdent les propriétés suivantes :

$$\forall\,\overrightarrow{u} \in \text{E},\quad \forall\,\overrightarrow{v} \in \text{E},\quad \varphi\left(\overrightarrow{u}\right)\cdot\overrightarrow{v} = \varphi\left(\overrightarrow{v}\right)\cdot\overrightarrow{u}.$$

$\left(\varphi\left(\overrightarrow{u}\right)\cdot\overrightarrow{v}\right.$ désigne le produit scalaire du vecteur $\varphi\left(\overrightarrow{u}\right)$ et du vecteur $\left.\overrightarrow{v}\right)$.

Partie A

On suppose que $\left(\overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$ est une base orthonormée de E.

1. Montrer qu'un endomorphisme φ de E appartient à $\mathcal{F}$ si et seulement si on a

$$\varphi\left(\overrightarrow{\imath}\right)\cdot\overrightarrow{\jmath} = \varphi\left(\overrightarrow{\jmath}\right)\cdot\overrightarrow{\imath}.$$

2. Montrer qu'un endomorphisme φ de E de matrice $\begin{pmatrix} a & c\\ b & d\end{pmatrix}$ relativement à la base $\left(\overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$, est un élément de $\mathcal{F}$ si et seulement si $b = c$.

3. a. Soit φ un élément de $\mathscr{F}$ de matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$ relativement à la base $\left(\vec{\imath}\,,\ \vec{\jmath}\right)$.

Montrer que si φ est involutive alors φ est une isométrie vectorielle.

Dans le cas $b = 0$ on caractérisera chacune des applications ainsi obtenues.

Dans le cas $b \neq 0$ on précisera la nature de l'application φ.

b. Déterminer l'endomorphisme involutif φ_0 de $\mathscr{F}$ tel que

$$\varphi_0\left(2\vec{\imath} - \vec{\jmath}\right) = \frac{2}{5}\vec{\imath} + \frac{11}{5}\vec{\jmath}.$$

(On donnera la matrice de φ_0, puis les éléments caractéristiques de φ_0).

Partie B

1. Soit g la fonction numérique de la variable réelle x définie par

$$g(x) = \frac{5}{2}x + 3\sqrt{x^2 - 4}.$$

Étudier les variations de cette fonction. Construire sa représentation graphique (C), dans un plan affine $\mathscr{E}$, associé au plan vectoriel euclidien E, et rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\ \vec{\imath}\,,\ \vec{\jmath}\right)$.
On montrera que (C) admet deux asymptotes.

2. Soit h l'homothétie de centre O et de rapport -1.

Déterminer, relativement au repère $\left(\mathrm{O}\,;\ \vec{\imath}\,,\ \vec{\jmath}\right)$, l'équation de la courbe (C$'$), image de la courbe (C) par h, et montrer qu'un point M de coordonnées $(x\ ;\ y)$ dans ce repère appartient à (C) $\cup$ (C$'$) si et seulement si

$$y^2 - \frac{11}{4}x^2 - 5xy + 36 = 0.$$

3. On désigne par f_0 l'application affine dont l'endomorphisme associé est φ_0 et qui laisse invariant le point O. Montrer que la courbe (C) $\cup$ (C$'$) est globalement invariante par f_0.

4. Soient $\left\{\begin{array}{l c l} \vec{I} & = & \dfrac{2}{\sqrt{5}}\vec{\imath} + \dfrac{1}{\sqrt{5}}\vec{\jmath} \\ \vec{J} & = & -\dfrac{1}{\sqrt{5}}\vec{\imath} + \dfrac{2}{\sqrt{5}}\vec{\jmath} \end{array}\right.$.

Déterminer l'équation de (C) $\cup$ (C$'$) dans le repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{I}\,,\ \vec{J}\right)$ et en déduire la nature de cette courbe.

Retrouver ainsi le résultat de la question 3. précédente.

5. Montrer qu'une primitive de la fonction $x \longmapsto \sqrt{x^2 - 4} + x$ est la fonction

$$x \longmapsto \frac{x^2}{2} + \frac{x\sqrt{x^2 - 4}}{2} - 2\,\mathrm{Log}\left|x + \sqrt{x^2 - 4}\right|.$$

Déterminer l'aire $\mathscr{A}(\alpha)$ de la partie du plan limitée par la courbe (C), la droite d'équation $y = -\dfrac{1}{2}x$, et les droites d'équations respectives $x = \alpha$ et $x = -2$ relativement au repère $\left(\mathrm{O}\,;\ \vec{\imath}\,,\ \vec{\jmath}\right)$, α étant un réel strictement inférieur à -2.