Durée : 4 heures

Baccalauréat C juin 1975 Orléans–Tours

EXERCICE 1

Soit la fonction f : $\quad x \longmapsto \dfrac{\text{Log}\, x}{x}$

où Log x désigne le logarithme népérien de x.

1. Étudier les variations de f et construire sa représentation graphique (C) dans un repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
2. En déduire, suivant les valeurs du nombre réel a, le nombre de solutions de l'équation :

$$\text{e}^{ax} = x$$

3. Calculer l'aire comprise entre l'axe $\left(\text{O},\ \vec{\imath}\right)$ la courbe (C) et les droites d'équations respectives $x = 2$, $x = 3$.
   Donner de cette aire une valeur approchée, en utilisant une table de logarithme.

EXERCICE 2

On désigne par α et α' les racines complexes de l'équation :

$$z^2 - 2z + 2 = 0$$

1. Calculer le module et l'argument de α et α' (on prendra $\alpha = a + b\text{i}$, avec $b > 0$)
2. n désignant un entier naturel, on considère, dans le plan complexe, les points M_n (d'affixe α^n) et M' (d'affixe α'^n).
   Construire ces points pour $0 \leqslant \alpha \leqslant 4$. Montrer que l'ensemble E$'$ des points M$'_n$ se déduit de l'ensemble E des points M_n par une application simple, Quel est l'ensemble E $\cap$ E$'$?
   Soit k un entier positif donné; comment peut-on par une transformation du plan, obtenir M'_{n+k} à partir de M_n ?

PROBLÈME

Soit $\mathscr{E}$ un espace vectoriel, sur le corps $\mathbb{R}$ des réels, de dimension 3, rapporté à la base $\mathscr{B} = \left(\vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.
À tout triplet $(a,\ b,\ c)$ de nombres réels, on associe l'endomorphisme de $\mathscr{E}$ (ou application linéaire de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$), noté $\varphi_{a,\ b,\ c}$ défini par

$$\begin{array}{lcl}\varphi_{a,\ b,\ c}\left(\vec{\imath}\right) & = & \vec{\imath}\\ \varphi_{a,\ b,\ c}\left(\vec{\jmath}\right) & = & a\vec{\imath} + \vec{\jmath}\\ \varphi_{a,\ b,\ c}\left(\vec{k}\right) & = & b\vec{\imath} + c\vec{\jmath} + \vec{k}\end{array}$$

1. Soit $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$ un élément de $\mathscr{E}$;
   soit $\vec{u'} = x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath} + z'\vec{k} = \varphi_{a,\ b,\ c}\left(\vec{u}\right)$
   Calculer x', y', z' en fonction de x, y, z.
   Soit $\mathscr{F}$ l'ensemble des endomorphismes $\varphi_{a,\ b,\ c}$ lorsque $(a,\ b,\ c)$ décrit $\mathbb{R}^3$; montrer que $\mathscr{F}$ est, pour la composition des applications, un sous-groupe du groupe linéaire de $\mathscr{E}$ (ou groupe des automorphismes de $\mathscr{E}$),

2. Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On considère, pour tout $a \in \mathbb{R}$ l'endomorphisme $\varphi_{a,\ f(a),\ a}$.

a. Montrer que l'application $h : a \longmapsto \varphi_{a,\ f(a),\ a}$ est injective.

b. Trouver une condition que vérifie f si h est un homomorphisme du groupe additif $\mathbb{R}$ dans le groupe $\mathcal{F}$. Montrer que cette condition entraîne $f(0) = 0$.

c. On suppose, de plus, f dérivable. Démontrer, en utilisant la condition précédente et la définition de la dérivée, que l'on a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = x + f'(0).$$

d. Déduire de ce qui précède toutes les fonctions f dérivables telles que h soit un homomorphisme du groupe additif $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{F}$.

3. On prend $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2$; on désigne par $\mathcal{G}_a$ l'endomorphisme tel que :

$$\mathcal{G}_a\left(\overrightarrow{\imath}\right) = \overrightarrow{\imath}, \quad \mathcal{G}_a\left(\overrightarrow{\jmath}\right) = a\overrightarrow{\imath} + \overrightarrow{\jmath}, \quad \mathcal{G}_a\left(\overrightarrow{k}\right) = \frac{1}{2}a^2\overrightarrow{\imath} + a\overrightarrow{\jmath} + \overrightarrow{k}.$$

Montrer que les $\mathcal{G}_a$ $(a \in \mathbb{R})$ forment un sous-groupe de $\mathcal{F}$ isomorphe au groupe additif $\mathbb{R}$.

4. $\mathcal{E}$ désigne un espace affine associé à $\mathcal{E}$, rapporté au repère $(\mathrm{O}, \mathcal{B})$; les axes sont désignés par $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{\imath}\right), \left(\mathrm{O}, \overrightarrow{\jmath}\right), \left(\mathrm{O}, \overrightarrow{k}\right)$.

$\mathcal{G}_a$ est l'application affine associée à g_a qui laisse O invariant.

On considère dans $\mathcal{E}$ la relation binaire $\mathcal{R}$ définie par :

$$M\mathcal{R}M' \iff \text{il existe un } a \in \mathbb{R} \text{ tel que } M' = \mathcal{G}_a(M).$$

a. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

b. Montrer que toute classe d'équivalence définie par $\mathcal{R}$ est incluse dans un plan parallèle au plan $\left(\mathrm{O}\,;\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$.

c. Soit le point $\mathrm{A}(1\,;\,1\,;\,1)$; la classe d'équivalence de A est une courbe du plan $\left(\mathrm{A},\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$.

Définir cette courbe par une équation cartésienne, en prenant un repère dont l'origine est le point $\omega(0\,;\,0\,;\,1)$ et les axes $\left(\omega,\ \overrightarrow{\imath}\right)$ et $\left(\omega,\ \overrightarrow{\jmath}\right)$.

Donner la nature de cette courbe et ses éléments géométriques,

d. Déterminer la classe d'équivalence d'un point donné du plan (0, i, j).