Durée : 4 heures

Baccalauréat C Orléans–Tours juin 1976

EXERCICE 1

1. Montrer que si deux nombres sont premiers entre eux, il en est de même pour leur somme et leur produit.
2. Résoudre dans $\mathbb{N}^\star \times \mathbb{N}^\star$ le système :

$$\left\{\begin{array}{l c l} x+y & = & 56\\ \text{ppcm}\,(x\,;\,y) & = & 105\end{array}\right.$$

EXERCICE 2

Dans le plan complexe, on considère l'ensemble E_1 des points M d'affixe z vérifiant :

$$z^2-(1+\text{i})^2=\overline{z}^2-(1-\text{i})^2$$

1. Déterminer et construire l'ensemble E_1.
2. Déterminer et construire l'ensemble E_2 des points M vérifiant :

$$[z-(1+\text{i})]\left[\overline{z}-(1-\text{i})\right]=8.$$

3. Vérifier qu'il existe un point de $E_1\,\cap\,E_2$ où les deux courbes ont même tangente.

PROBLÈME

Partie A

Soit E un espace vectoriel euclidien réel orienté de dimension 2, et (tj) une base orthonormée directe de E. Pour tout réel t, on appelle φ_t l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\left(\overrightarrow{\imath}\,,\,\overrightarrow{\jmath}\right)$ est :

$$\begin{pmatrix}\text{e}^{-t}\cos t & -\text{e}^{-t}\sin t\\ \text{e}^{-t}\sin t & \text{e}^{-t}\cos t\end{pmatrix}$$

1. Reconnaître φ_0 et φ_π. Montrer que φ_t est une similitude, composée de deux endomorphismes simples de E.
2. Soit F l'ensemble des endomorphismes φ_t. Montrer que F, muni de la composition des applications est isomorphe au groupe additif des réels.

Partie B

À l'espace vectoriel euclidien orienté E, on associe un espace affine $\mathscr{E}$, muni d'un repère orthonormé direct $\left(\text{O}\,;\,\overrightarrow{\imath}\,,\,\overrightarrow{\jmath}\right)$. Pour tout nombre réel t on définit le point de coordonnées $(x\,;\,y)$ telles que :

$$\left\{\begin{array}{l c l} x & = & \text{e}^{-t}\cos t\\ y & = & \text{e}^{-t}\sin t\end{array}\right.$$

1. **a.** Étudier, sur l'intervalle $\left[-\dfrac{\pi}{2}~;~\dfrac{3\pi}{2}\right]$, les variations de la fonction f qui, à t réel, associe l'abscisse de M :

$$f(t) = \mathrm{e}^{-t}\cos t.$$

b. Comparer $f(t)$ et $f(t+2k\pi), k \in \mathbb{Z},~t \in \left[-\dfrac{\pi}{2}~;~\dfrac{3\pi}{2}\right]$; en déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$.

c. Soit u et v les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$u(t) = \mathrm{e}^{-t} \qquad v(t) = -\mathrm{e}^{-t}.$$

(C_1) et (C_2) leur courbe représentative dans un repère $\left(\Omega.~;~\overrightarrow{\imath}~;~\overrightarrow{\jmath}\right)$.

Soit (C) la courbe représentative de f dans $\left(\Omega.~;~\overrightarrow{\imath}~;~\overrightarrow{\jmath}\right)$.

Déterminer $(C) \cap (C_1)$ et $(C_1) \cap (C_2)$ et en déduire que la fonction f n'admet pas de limite en $-\infty$?

d. Comparer aux points de $(C) \cap (C_2)$ les tangentes à (C) et (C_1) (de même pour (C) et (C_2)).

e. La fonction f admet-elle une limite en $+\infty$?

f. Utiliser ce qui précède pour représenter graphiquement f sur $\left[-\dfrac{\pi}{2}~;~\dfrac{3\pi}{2}\right]$.

On pourra utiliser les valeurs numériques suivantes :

$$\begin{array}{lclclcl}
\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}} & = & 0,455 & \qquad & \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}} & = & 2,193\\
\mathrm{e}^{-\pi} & = & 0,043 & \qquad & \mathrm{e}^{-3\frac{\pi}{4}} & = & 0,094
\end{array}$$

2. Pour tout entier naturel k on pose :

$$a_k = \int_{-\frac{\pi}{2}+k\pi}^{-\frac{\pi}{2}+(k+1)\pi} \mathrm{e}^{-t}\cos t\,\mathrm{d}t.$$

a. Calculer cette intégrale (on pourra utiliser deux intégrations par parties).

b. Montrer que la suite b définie par : $\forall k \in \mathbb{N},\quad b_k = |a_k|$ est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.

c. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} b_k$ a une limite quand n tend vers $+\infty$. Interpréter géométriquement ce résultat.

Partie C

Un point matériel M de $\mathcal{E}$ est en mouvement pendant l'intervalle de temps $[0~;~+\infty[$. Sa position à la date t est définie par ses coordonnées dans le repère $\left(\mathrm{O}~;~\overrightarrow{\imath},~\overrightarrow{\jmath}\right)$:

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & \mathrm{e}^{-t}\cos t\\ y & = & \mathrm{e}^{-t}\sin t\end{array}\right.$$

1. Déterminer le vecteur vitesse $\overrightarrow{\mathrm{V}}$ de M et le vecteur accélération $\overrightarrow{\Gamma}$ de M à la date t.
   Le mouvement est-il accéléré, retardé?
2. Démontrer que l'angle $\left(\overrightarrow{\mathrm{O}M},~\overrightarrow{\mathrm{V}}\right)$ que fait le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{O}M(t)}$ avec le vecteur vitesse $\overrightarrow{\mathrm{V}}$ de M à la date t est constant et en donner une mesure.
3. Exprimer $\left\|\overrightarrow{\mathrm{O}M(t)}\right\|$ en fonction de t.
4. Utiliser ce qui précède pour indiquer l'allure de la trajectoire de M.