Durée : 4 heures

Baccalauréat C Orléans-Tours septembre 1975

EXERCICE 1

Calculer les racines de l'équation

$$z^8 + z^4 + 1 = 0, \quad z \in \mathbb{C}$$

1. En résolvant le système

$$\left\{\begin{array}{lcl} z^4 & = & u \\ u^2 + u + 1 & = & 0 \end{array}\right.$$

2. En décomposant le polynôme $z^8 + z^4 + 1$ en un produit de facteurs de degré 2 à coefficients réels (on remarquera que le polynôme $x^4 + x^2 + 1$ est le produit de deux polynômes du second degré à coefficients réels).

EXERCICE 2

1. Étudier et représenter graphiquement dans le plan rapporté à un repère orthonormé la fonction : $f(x) = \cos^5 x$, x appartenant à l'intervalle $[-\pi ; \pi]$.
2. Calculer l'aire arithmétique de l'ensemble des points du plan situés entre l'axe des abscisses, la courbe $(\mathscr{C})$ représentant la fonction f et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = \pi$.

N. B. : *On choisira comme unité sur les axes :* 1 cm.

PROBLÈME

Soit π un plan affine, rapporté à un repère $\left(\Omega, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$; on note f_α l'application de π dans π définie analytiquement par

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & x + \alpha \\ y' & = & 2\alpha x + y + \alpha^2 - 4\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}; \end{array}\right.$$

et on note $\mathscr{A}$ l'ensemble des applications f_α quand α décrit $\mathbb{R}$.

1. **a.** Montrer que f_α est une application affine bijective,

   b. Montrer que la loi de composition des applications est une loi de composition interne définie dans $\mathscr{A}$.

   c. En étudiant l'application $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathscr{A} \\ \alpha & \longmapsto & f_\alpha \end{array}$, montrer que $(\mathbb{R}, +)$ est isomorphe à $(\mathscr{A}, \circ)$.

   En déduire la structure de $(\mathscr{A}, \circ)$ et les définitions analytiques de $\left(f_\alpha\right)^{-1}$, $f_\alpha \circ f_\alpha$.

2. Soit P la parabole d'équation $y = x^2 - 4x$ dans $\left(\Omega, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

   a. Montrer que si M appartient à P il en est de même de $f_\alpha(M)$.

   b. Montrer que P est globalement invariante par f_α c'est-à-dire que
   $P = f_\alpha(P)$.

3. On note M_x le point de P qui a pour abscisse x et T_x la tangente à P en M_x.

   a. Quelle est l'équation de T_0, T_α dans $\left(\Omega, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$?

b. Montrer que $M_\alpha = f_\alpha\,(M_0)$ et que $T_\alpha = f_\alpha\,(T_0)$.

4. Déterminer a, b, c réels pour que la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ dans $\left(\Omega,\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$ soit globalement invariante par $f_{a'\alpha}$.

5. On note g_β l'application de π dans π définie analytiquement dans $\left(\Omega,\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$ par

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & \beta x \\ y' & = & 4\beta(\beta - 1)x + \beta^2 y, \quad \beta \in \mathbb{R}^\star. \end{array}\right.$$

Soit B l'ensemble des applications g_β quand β décrit $\mathbb{R}^\star$.

a. Montrer que g_β est une application affine bijective.

b. Montrer que $\left(\mathbb{R}^\star,\ \times\right)$ est isomorphe à $(B,\ \circ)$. En déduire la structure de $(B,\ \circ)$ et la définition analytique de $\left(g_\beta\right)^{-1}$.

Montrer que la parabole d'équation $y = x^2 - 4x$ dans $\left(\Omega,\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$ est globalement invariante par $g_{/3'\beta}$.

6. Chercher les paraboles d'équation $y = ax^2 + bx + c$ dans $\left(\Omega,\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$ globalement invariante par g_β.