

∞ Baccalauréat C Orléans–Tours septembre 1976 ∞

EXERCICE 1

f est la fonction réelle de la variable réelle x définie sur l'intervalle $I = \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$ par :

$$f(x) = |x| + \operatorname{tg} x$$

1. Étudier cette fonction et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé.
2. Montrer qu'il existe un réel unique x_0 appartenant à I tel que :

$$f(x_0) = \frac{\pi}{8}.$$

3. Calculer $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx$.

Quelle est la valeur moyenne de f sur l'intervalle I ?

EXERCICE 2

On dispose de deux urnes dont l'une contient deux boules marquées 1, deux boules marquées 2 et deux boules marquées 3 et l'autre contient trois boules marquées 1, deux boules marquées 2 et une boule marquée 3.

On tire une boule dans chaque urne et on suppose que chaque couple de boules a la même probabilité d'être tiré.

1. Montrer que la probabilité d'obtenir 3 comme somme des nombres écrits est $\frac{5}{18}$.
2. On considère la variable aléatoire X qui, à chaque couple de boules, associe la somme des nombres écrits sur ces boules.

Donner la loi de probabilité de X . Calculer l'espérance mathématique et l'écart-type de X .

PROBLÈME

\mathcal{V} étant un espace vectoriel réel, et \mathcal{V}' et \mathcal{V}'' deux sous-espaces vectoriels donnés de \mathcal{V} , on se propose d'étudier l'ensemble E des endomorphismes de \mathcal{V}' de noyau \mathcal{V}'' et d'image \mathcal{V} .

Partie A

\mathcal{V} est un plan vectoriel de base $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$, \mathcal{V}' est la droite vectorielle de base

$\vec{v}' = \vec{i} + \vec{j}$ et \mathcal{V}'' est la droite vectorielle de base $\vec{v}'' = a\vec{i} + b\vec{j}$, où a et b sont deux réels différents de 0.

1. On suppose $a \neq b$
 - a. Montrer que (\vec{v}', \vec{v}'') est une base de \mathcal{V} .
 - b. Soit p la projection vectorielle sur \mathcal{V}'' parallèlement \mathcal{V}' . Est-ce que p est élément de E ?
 - c. Soit f un élément de E . Écrire sa matrice dans la base $\mathcal{B}' = (\vec{v}', \vec{v}'')$. En déduire que f est la composée d'une homothétie vectorielle et d'une projection vectorielle que l'on déterminera. Y a-t-il commutativité de la composition?

- d. Démontrer que E est égal à l'ensemble des endomorphismes $h \circ p$, où h décrit l'ensemble \mathcal{H} des homothéties vectorielles de \mathcal{V} .
- e. E est-il stable pour la loi de composition des applications? Même question pour l'addition des applications.
- f. Montrer que l'application :
$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H} & \rightarrow & E \\ h & \mapsto & h \circ p \end{array}$$
 est un isomorphisme de groupe, les ensembles \mathcal{H} et E étant munis de la loi de composition des applications de \mathcal{V} dans \mathcal{V} . Préciser l'élément neutre de (E, \circ) et l'élément symétrique d'un élément donné de E .
2. On suppose $a = b$
- a. Peut-on définir la projection vectorielle p de la partie A?
- b. Soit f_1 , l'endomorphisme de \mathcal{V} dont la matrice dans la base \mathcal{B} est :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Vérifier que f_1 est élément de E .

- c. Soit f un endomorphisme de \mathcal{V} , de matrice $\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$ dans la base \mathcal{B} .
Donner les conditions nécessaires et suffisantes sur $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ pour que f soit élément de E .
- d. En déduire que E est égal à l'ensemble des endomorphismes $h \circ f_1$, où h décrit \mathcal{H} . E est-il stable pour la loi de composition des applications?

Partie B

\mathcal{V} est un espace vectoriel réel de dimension 2 ou 3. Si f est un élément de E , on notera $\text{Ker } f = \mathcal{V}'$ et $\text{Im } f = \mathcal{V}''$.

1. Donner un exemple de sous-espaces \mathcal{V}' et \mathcal{V}'' tels que E soit l'ensemble vide. On supposera dans la suite du problème que E n'est pas l'ensemble vide.
2. f et g étant deux éléments de E :
- a. Montrer que $\mathcal{V}' \subset \text{Ker } (g \circ f)$ et $\text{Im } (g \circ f) \subset \mathcal{V}''$.
- b. Si $\mathcal{V}' = \mathcal{V}''$, montrer que : $\forall \vec{v} \in \mathcal{V}, g \circ f(\vec{v}) = 0$.
 E est-il stable pour la loi de composition des applications? Rapprocher ce résultat de celui trouvé en première partie 2. d.
- c. Si \mathcal{V}' et \mathcal{V}'' sont deux sous-espaces supplémentaires de \mathcal{V} , montrer que quel que soit \vec{v} appartenant à $\text{Ker } (g \circ f)$, $f(\vec{v}) = 0$ et montrer que $\text{Im } (g \circ f) = \mathcal{V}''$. E est-il stable pour la loi de composition des applications?
3. \mathcal{V}'' est une droite vectorielle de \mathcal{V} et \mathcal{V}' un sous-espace supplémentaire de \mathcal{V}'' dans \mathcal{V} .
- a. Montrer que pour tout élément f de E , $f(\mathcal{V}'') \subset \mathcal{V}''$. En déduire que pour tout vecteur \vec{v} de \mathcal{V} , $f(\vec{v})$ et \vec{v} sont colinéaires.
- b. Démontrer que la restriction de f à \mathcal{V}'' est une homothétie vectorielle.
- c. Démontrer que E est égal à l'ensemble des endomorphismes $h \circ p$, où h décrit l'ensemble des homothéties vectorielles de \mathcal{V} , p étant la projection vectorielle sur \mathcal{V}'' parallèlement à \mathcal{V}' .

N. B. - Dire que E est stable pour la loi de composition des applications signifie :

$$\forall (f, g) \in E^2, \quad g \circ f \in E.$$