∽ Orléans juin 1967 ∾
Baccalauréat mathématiques élémentaires

EXERCICE 1

Démontrer l'égalité

$$\text{cotg}\, x - 2\text{cotg}\, 2x = \text{tg}\, x \quad \text{pour } x \neq \frac{k\pi}{2}.$$

En déduire une expression simple de

$$S = \text{tg}\, x + \frac{1}{2}\text{tg}\,\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\text{tg}\,\frac{x}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n}\text{tg}\,\frac{x}{2^n}.$$

EXERCICE 2

Déterminer le coefficient a pour que le polynôme

$$P(x) = x^3 + ax^2 + x + 6$$

soit divisible par $x - 2$.
Résoudre l'équation (Log désignant le logarithme népérien)

$$3\text{Log}\,(x-1) = \text{Log}\,\left(x^2 + 2x - 7\right).$$

EXERCICE 3

Soit un repère orthonormé ωX, ωY. Les points A et B ont pour coordonnées respectives $(a\,;\,0)$ et $(-a\,;\,0)$, a étant une longueur donnée.
L'axe wZ est tel que

$$\left(\overrightarrow{\omega X}\,,\,\overrightarrow{\omega Z}\right) = \theta, \quad 0 \leqslant \theta < \pi.$$

Le point M de l'axe ωZ est repéré par $\overline{\omega M} = x$.

1. **a.** Exprimer en fonction de x et θ le rapport

$$y = \frac{M\text{A}^2}{M\text{B}^2} \text{ soit } \quad y = f_\theta(x).$$

Étudier les variations des fonctions f_θ, en discutant suivant les valeurs de θ.

b. Tracer le graphique de f_θ, dans un repère orthonormé Ox,Oy, pour

$$\theta = 0, \qquad \theta = \frac{\pi}{3}, \qquad \theta = \frac{\pi}{2}, \qquad \theta = \frac{2\pi}{3}.$$

2. Déduire de 1 a que, pour θ fixé, il existe en général un ensemble (K), que l'on précisera, de valeurs de k tel que, à toute valeur k de (K) correspondent deux points M, soit Ml et $M2$ de ωZ, vérifiant $\dfrac{M\text{A}}{M\text{B}} = k$.
3. Refaire géométriquement l'étude de la question 2, en discutant l'intersection de l'axe ωZ et du cercle (C_k), ensemble des points M tels que $\dfrac{M\text{A}}{M\text{B}} = k$.
4. **a.** À tout point M_1 du plan, situé en dehors de ωY, correspond le point, M_2 où ωM_1 recoupe le cercle (C_k) passant par M_1.
Montrer que M_2 est le transformé de M_1 par une inversion T, dont on précisera le cercle d'inversion.

b. Soit un point M_1 du plan, distinct de ω, et M_2 son transformé par T. Soit M_1' et M_2' les transformés respectifs de M_1 et M_2 par l'inversion (I) de pôle A et de puissance $2a^2$?

Par quelle transformation ponctuelle M_1' et M_2' se correspondent-ils ?

On pourra considérer le faisceau de cercles de points de base M_1 et M_2 et son transformé par (I).

c. Soit (S) la symétrie par rapport à ωY. On désigne par $(H) = (S) \circ (T)$ la transformation ponctuelle obtenue par composition des applications (T) et (S), dans cet ordre.

Conserve-t-elle les angles ? Est-elle involutive ?

d. Soit M_3 le transformé de M_1 par (H) et M_3' le transformé de M_3 par (I). Indiquer une forme réduite de la transformation qui à M_1' fait correspondre M_3'.