Baccalauréat Orléans septembre 1966
série mathématiques élémentaires

I.

1. Résoudre, dans le corps des complexes,

$$z^2 - 2z + 4 = 0.$$

2. Les racines étant z' et z'', calculer $u = \dfrac{z'}{z''}$ (z' a un argument entre 0 et $\dfrac{\pi}{2}$) et, n étant un entier naturel, le module et l'argument de u^n.
3. Trouver le module et les arguments des racines cubiques de u.

II.

On considère la fonction

$$y = |x - 1| + \frac{1}{x}.$$

1. Étudier les variations de cette fonction et les représenter graphiquement dans un système d'axes orthonormé.
2. Construire avec précision le tangentes à la courbe tu point A d'abscisse $+1$ et au point B d'abscisse -1.
3. Calculer l'aire limitée par la courbe, la droite d'équation $y = x - 1$ et les droites $x = 1$ et $x = a$ ($a > 1$).

   Donner le résultat en fonction de a.

III.

On considère deux demi-droites, Ox et Ou, telles que $\left(\overrightarrow{\text{O}x},\ \overrightarrow{\text{O}u}\right) = \dfrac{\pi}{3}$.
Un point M décrit la demi-droite Ox ; il lui correspond N sur Ou, de façon que, K étant la projection orthogonale de N sur Ox, on ait $\overline{\text{MK}} = k$ (k nombre positif donné).
O, considéré comme appartenant à Ox, a un homologue, I, sur Ou.

1. Soit x l'abscisse de M sur Ox, $\left(\overline{\text{OM}} = x\right)$.

   Calculer $\overline{\text{ON}}$, abscisse de N sur Ou, en fonction de x et de k.
   On appelle y la distance des points M et N.
   Calculer y^2 en fonction de x et k ; étudier la variation de y quand x varie de 0 à $+\infty$.
   En axes orthonormés, tracer le graphe de cette fonction.
   Montrer que c'est une partie d'une hyperbole, dont on donnera l'équation réduite, l'asymptote, l'excentricité.
2. Trouver l'ensemble décrit par le point J, milieu de KN.
   En déduire celui de P, milieu de MN.
3. Montrer que $\overline{\text{OI}} = 2k$ et en déduire que

$$\overline{\text{IN}} = 2\overline{\text{OM}}.$$

   Démontrer que N est homologue de M dans une similitude, dont on déterminera le point double, S.
   Évaluer l'angle SMN.

4. Montrer que, si M décrit la demi-droite Ox, la droite MN reste tangente à une parabole de foyer S.
   Quelle est sa directrice, Δ ?
   Construire le point de contact, Q, et préciser l'arc qu'il décrit.